This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

Churchill
no 16

The Gift of

WILLIAM H. BUTTS, Ph.D.

A.B. 1878 A.M. 1879

Teacher of Mathematics

1898 to 1922

Assistant Dean, College of Engineering

1908 to 1922

Professor Emeritus

1922

QA
35
.B719

ELEMENTA MATHESEOS

AD USUM

STUDIOSÆ JUVENTUTIS

ELUCUBRATA

A P. MICHAELE ANGELO BONOTTO

EX ORDINE PRÆDICATORUM.

VENETIIS,

Sumptibus HEREDIS NICOLAI PEZZANA.

MDCCLXXII.

SUPERIORUM PERMISSU, AC PRIVILEGIO.

Πρὸς πάσας μαθήσεις, ὥστε κάλλιον ἀποδέχεσθαι, ἴσμεν που ὅτι τῷ ὅλῳ καὶ παντὶ διοίσει ἡμμένος τε γεωμετρίας καὶ μή. Plat. Lib. VII. Reip.

Illum, qui Geometriæ dedit operam, ſcimus Scientiis ceteris addiſcendis ſummopere eſſe aptiorem eo, qui omnino eſt expers. Plato VII. de Republica.

Gift
Professor William H. Butts
10-14 1935

ILLUSTRISS. ATQUE EXCELL. VIRO

JOANNI WIDMANN;

SACRI ROMANI IMPERII, NEC NON ORTEMBURGI COMITI;
SANCTI PATERNIANI, AC SOMMEREGGÆ
L. BARONI, &c. PATRICIO VENETO, &c.

P. MICHAEL ANGELUS BONOTTO
Ord. Præd. Felicitatem.

QUod *maxime optaveram, Joannes Widmann, Vir Illuſtriſſime atque Excellentiſſime, ut videlicet ſtudiorum meorum Matheſeos, quibus excolendis quatuor fer-*

me annos conſumpſi, Patronum aliquem, virtute non minus, quam genere, nobilem reperirem; id ſane in Te uno ex animi ſententia mihi videor conſecutus. Quamvis enim multis, iiſque graviſſimis occupationibus diſtrictus detineare, ſi quid tamen otii nanciſci potes, id nulla in re libentius, quam in ſtudiis harum Scientiarum conſumere ſoles, eaque animi alacritate ac contentione, ut pauciſſimi, vel ex eorum numero qui omne tempus ætatis in hoc genere contrivere, Tui pares eſſe vix poſſint Accedit huic ſummus, quo flagras, erga litteras & litteratos amor, quorum familiaritatibus delectaris mirifice, eoſque benignitate tua recreas, foves, confirmas: neque ullum umquam diem abire pateris, quo non de ſtudiis ingenuarum Artium, in primis vero Philoſophiæ egregie mereri nitaris. Rarum hoc, & prodigii pene ſimile florenti adhuc ætate, ac in tanta fortuna, ſed perpetuum in Widmanna gente; quæ cum de antiquitate, divitiis, affinitatibus, auctoritate, viris pace belloque clariſſimis, paucis fere conceſſura ſit: moderatione tamen, æquitate, clementia, comitate, aliiſque humanitate dignis virtutibus, præcipue vero in Superos pietate glorioſius nihil aut præſtabilius judicavit. Qua laude quid honorificentius excogitari poteſt? Hæc una ſcilicet & acceptæ a Majoribus nobilitati, & exaggeratis opibus longiſſime antecellit: hæc una hominum vitam caducam & fragilem, anguſtiſque finibus circumſcriptam, non ſolum prætergreditur, ſed etiam immortalitate donare poteſt. Cum igitur & nobilitatis ſplendorem, & acumen ingenii tui, & ſingularem liberalitatem quum in aliis rebus multis, tum præcipue in Diſciplinis ornandis, in doctis hominibus excipiendis fovendiſque attentius conſiderarem; oblatam mihi aliquando occaſionem ad ſignificandum, quanti Te ac virtutes tuas facerem,

amit-

amittere nolui; videlicet pro certo habens, hoc meum qualecumque munuſculum a Te (pro Tua iſta ſingulari ac perpetua qua es in omnes humanitate) perbenigne exceptum iri. Hic porro Liber Matheſeos Elementa complectitur, in quibus ad communem ſtudioſæ Juventutis utilitatem facili, candida, & ad tironum captum accomodata oratione expendere ac demonſtrare conatus ſum, quæ hactenus a nonnullis fuſius, ab aliis obſcure nimium ac jejune tradita fuerant. Quæ Elementa quamvis plura contineant ex ſummorum Mathematicorum cum veterum tum recentiorum Libris depromta, ea tamen exhibent ita immutata, eaque formæ induta, ut jam alia omnino videantur: & prætera novam quamdam methodum proponunt ab illa Euclidis ceterorumque longe diſſimilem, ac, niſi me rerum mearum amor valde fallit, non omnino contemnendam. Quid vero hiſce meis conatibus egerim, penes doctos homines harumque rerum peritos judicium eſto. Hæ ſunt cauſſæ, quibus adductus, Te Virum Ampliſſimum in rerum pulcherrimarum meditatione verſantem interpellare auſus ſum: nunc illud Te oro atque obſecro, ut ſi perſpectæ Sapientiæ Tuæ plurimum tribuo; ſi Tibi, cariſſimo Pignori, atque univerſæ Familiæ Tuæ læta & proſpera omnia a Deo Optimo Maximo & precor & opto; quod facere ex animo numquam deſinam; munuſculum hoc meum æqui bonique conſulas, meque in fidem & clientelam tuam humaniter tuo more recipias. Id ſi feceris, magnum pulcherrimumque laborum meorum tuliſſe fructum mihi videbor.

Ad Lectorem.

MAxime præclarus aditus & Regia quaſi ſemita ad Divinarum humanarumque rerum ſcientiam, veram nempe Philoſophiam, ab antiquioribus uſque temporibus habitæ ſemper ſunt Mathematicæ Diſciplinæ: ſublimem illum ac conſpicuum perfectionis gradum, ad quem Phyſices & Mechanices ſtudia noſtra hac ætate evecta conſpiciuntur, non aliunde equidem profectum novimus, quam a *Continuæ* ac *Diſcretæ* Quantitatis recta applicatione ad naturalium Phænomenorum obſervationes: ipſamet hominum Societas, ac Civilis vivendi ratio nec conſiſtere nec vigere quodammodo poſſet ſine harum cognitionum ope, quæ ad agrorum dimenſionem, ad aquarum curſum dirigendum, ad Artificum opera, ac mercaturam recte riteque aptarentur.

Præter memorata hactenus emolumenta, quæ ex Mathematicis Diſciplinis in Civilem Societatem plurimaſque Scientias effluere compertum eſt, non exiguam ſane utilitatem, eamque ſibi peculiarem, homines inde haurire novimus: verum enim vero Univerſalis Matheſeos ſtudia, *Arithmetica* nempe ac *Geometria* ſunt, ut ait Divinus ille Plato, præpetes veluti validæque alæ, quibus humana mens ad veri indaginem evehitur: ex quo fit, ut harum ope e ſenſibilium qualitatum ſphæra, queis undique circumſepta invenitur, quæque illam ſæpius in errorem pertrahunt, ex una ad aliam veritatem aſſurgens atque progrediens, ſenſim ac ſine ſenſu tali pacto ſublimioribus aſſueſcit cogitationibus, quamvis nec Logicam attigerit, nec Dialecticis inſtitutionibus ſit imbuta: atque hinc præterea acriora illa atque profundiora ingenia efformari perſpicuum eſt, quæ tantopere miramur, quæque apud nos *Geometricarum mentium* nomen obtinent.

Nil itaque mirari debemus ſi præclaram hanc facultatem, quæ tanta hominibus emolumenta tamque uberrima confert, maxima alacritate ac cura tam ab antiquis quam a recentioribus fuerit exculta. Inter priores præ omnibus enituit Megarenſis Euclides, cujus Opus in XII. Libros diſtinctum, qui præcipuas tam *Continuæ* quam *Diſcretæ* quantitatis proprietates complectuntur, integer ac perfectus Univerſalis Matheſeos Tractatus dici poteſt. Poſt Scientiarum in Europa inſtaurationem tantii

Viri

viri nomen ac fama in cauſa fuit, ut celebriores quique Auctores qui hiſce ſtudiis operam dedere, hunc tantum veluti ducem ſectarentur, atque in ejuſdem ſcriptis corrigendis ac emendandis, obſcuraque eorum ſignificatione elucidanda maxima cura & contentione laborarent.

Haud diverſa fuit illorum mens, qui ut Adoleſcentium his incumbentium ſtudiis gratiam inirent, breviori quadam Matheſeos methodo Euclidis Elementa veluti exemplar eiſdem propoſuere. Quam in rem cum omnes ad invicem majorem perſpicuitatem ac facilitatem exquirerent, unuſquiſque ceteris præſtitiſſe ſibi in animum induxit.

Quamvis vero maxima ſint profecto Græci Auctoris merita, magnamque laudem mereantur impenſis laboribus ac ſtudiis modo *memorati Scriptores*, medio tamen jam elapſo Sæculo obſervari cæptum eſt Euclideam methodum perfici poſſe meliori quodam ordine, faciliori quoque magiſque naturæ conſentaneo, præmittendo ſcilicet ſimpliciores ac magis perſpicuas notiones difficilioribus illis magiſque compoſitis, in gratiam præcipue ſtudioſorum Adoleſcentium, qui in primo Scientiarum limine cum veræ ſive apparentes occurrant difficultates, animum deſpondere ſolent aut deterreri: paucis namque iiſque perraris ingeniis peculiari numinum favore elargitum eſt *Carteſii* atque *Paſchalii eximium* acumen acerrimamque penetrationem ſortiri. Experientia deinde optima rerum magiſtra optimeque auſpicato exitu perſpicue innotuit quam recte priori illi methodo nova hæc poſterior eſſet anteferenda.

In hiſce meis Univerſæ Matheſeos Elementis, quæ in lucem edenda propoſui, Recentiorum methodum perſequi maxima ex parte curavi, Clariſſimorum præcipue *Sympſonii* & *Chapelii*, qui inter ceteros magis excelluiſſe videntur. Quam ingenue quoque id fateor quod memoratis modo Scriptoribus me debere ſentio, fidenter æque aſſerere non verebor majori quam potui cura & ſtudio adlaboraſſe ut eorum methodus, ubicumque fas eſſet, facilior ac ſimplicior redderetur; idque præſtitum a me eſſe redigendo ad ſimplices perſpicuaſque definitiones quaſdam ex illorum Propoſitionibus, plureſque alias ad Corollaria, ſive, ut ajunt, conſequentias ex præcipuis Propoſitionibus deductas: ex quibus omnibus haud inanis ſpes adeſt fore ut ingenui Adoleſcentes aliam quoque eamque eximiam utilitatem hauriant, ut aſſueſcant ſcilicet intellectum ad longiorem cogitationum ſeriem perſequendam: qua peculiari ut arbitror dote niſi præſens Opus eſſet diſtinctum, nil aliud profecto fuiſſet ſuſceptus labor, quam *ligna in lucum*, ut ajunt, *congerere*, *noctuaſque Athenas deportare*

por-

portare; cum noſtra hac ætate optimis hujus Scientiæ Elementis ac Tractatibus Italicæ gentes ſint perabunde inſtructæ. Ceterum viderint docti Viri, ac ſtudioſi præſertim Adoleſcentes, quorum majorem profectum atque emolumentum hoc edito Opere provehendum ſuſcepi, an quod mihi præſtandum propoſui, id revera præſtiterim.

NOI RIFORMATORI

Dello Studio di Padova.

AVendo veduto per la Fede di Reviſione, ed Approvazione del *P. F. Filippo Roſa Lanzi* Inquiſitor General del Santo Officio di Venezia nel Libro intitolato: *Elementa Matheſeos ad uſum ſtudioſæ Juventutis elucubrata a P. Michaele Angelo Bonotto ex Ordine Prædicatorum MS.* non v' eſſer coſa alcuna contro la Santa Fede Cattolica, e parimenti per Atteſtato del Segretario Noſtro, niente contro Principi, e buoni coſtumi, concediamo Licenza all' *Erede di Niccolò Pezzana*, che poſſi eſſere ſtampato, oſſervando gli ordini in materia di Stampe, e preſentando le ſolite Copie alle Pubbliche Librarie di Venezia, e di Padova.

Dat. li 20. Luglio 1772.

{ *Sebaſtian Zuſtinian Rif.*

{ *Alviſe Vallareſſo Rif.*

{ *Franceſco Moroſini 2°. Cav. Proc. Rif.*

Regiſtrato in Libro a Carte 105. al Num. 868.

Daviddè Marcheſini Segr.

Adì 23. Agoſto 1772.

Regiſtrato al Magiſtrato Eccellentiſs. contro la Beſtemia in Libro a Carte 48.

Andrea Grattarol Segr.

Cum

CUm omnis, quæ a ratione ſuſcipitur de aliqua re inſtitutio, debeat, ut inquit Cicero, a definitione proficiſci, ut intelligatur quid ſit id, de quo diſputetur; operæ prætium duco ante definire quid ſint Diſciplinæ, de quibus ego modo adjuvante Deo Opt. Max. ſum ſcripturus, & nonnullarum vocum, quibus frequentiſſime utendum erit, ſignificationem explanare.

PRÆNOTIONES.

PRIMA.

QUantitas, vel *Magnitudo* dicitur id omne, quod partes habet, *ſive quidquid augeri, & minui poteſt*. Hujus generis ſunt corpus, ſuperficies, linea, tempus, motus, velocitas, numerus, menſura, pondus, &c.

SECUNDA.

Atque ea quantitas, quæ ex diſcretis, ſejunctiſque partibus componitur, *Diſcreta*, vel *Disjuncta* appellatur; ut numerus.

TERTIA.

Quantitas vero illa, cujus partes continuæ, connexæ, ſibique conjunctæ ſunt, *Continua* dicitur; ut corpus, ſuperficies, linea.

QUARTA.

Geometria dicitur ea Diſciplina, quæ omnia continuæ quantitatis genera, & proprietates contemplatur.

QUINTA.

Arithmetica vero eſt doctrina illa, in qua diſcretæ quantitatis, numerorum nempe proprietates, munera, & accidentia demonſtrantur.

SEXTA.

Algebra, ſeu *Arithmetica Specioſa* ea eſt Diſciplina, quæ ſpeciebus quibuſdam, nimirum Alphabeti litteris, præcipuas, atque generales tam diſcretæ, quam continuæ quantitatis proprietates explanat, atque mirabili artificio demonſtrat.

SEPTIMA.

Definitio eſt oratio explicans naturam alicujus rei, aut vocem illam, qua ad eandem rem ſignificandam utimur.

OCTAVA.

Propoſitio eſt oratio, in qua aliquid menti noſtræ contemplandum exhibetur.

NONA.

Theorema dicitur ea propoſitio, in qua aliquid demonſtrandum proponitur.

DECIMA.

Axioma, *Pronunciatum*, ſive *Effatum* appellatur Theorema illud, cujus veritas adeo certa, & evidens eſt, ut cuilibet menti vel leviter cogitanti, ſtatim ulla abſque demonſtratione affulgeat.

UNDECIMA.

Problema eſt propoſitio, in qua aliquid faciendum jubetur.

DUODECIMA.

Poſtulatum vero dicitur problema illud, cujus conſtructio adeo facilis, & evidens eſt, ut nulla prorſus indigeat demonſtratione.

DECIMATERTIA.

Lemma, ſeu *Præſumptio*, eſt propoſitio illa, quæ alteri propoſitioni velut principaliori demonſtrandæ inſervit, atque ſeorſum ponitur ab illa, ne ſeries perturbetur.

DECIMAQUARTA.

Corollarium, vel *Conſectarium*, vocatur propoſitio illa, quæ ab alia jam demonſtrata, facile, nulloque negotio deducitur.

DECIMAQUINTA.

Scholium dicitur id, quod ponitur poſt aliquam generalem demonſtrationem, quando in ea aliquid peculiari notatione dignum continetur.

ELEMENTORUM ARITHMETICES LIBER PRIMUS.

De Numeris Integris.

DEFINITIO PRIMA.

NOtæ, vel ſigna, ſeu figuræ, quibus utimur in Arithmetica 1.
ad numerum quemlibet exprimendum, ſunt 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, quæ ſignificant unum, duo, tria, quatuor, quinque, ſex, ſeptem, octo, novem, quibus notis, ſeu figuris additur cifra 0, quæ dicitur *Zero*, atque per ſe nihil ſignificat, ſed aliis notis ad dexteram addita (quando dicimus ad dexteram, vel ad ſiniſtram, ſemper intelligendum eſt ſcribentis), ipſarum valorem decuplo majorem reddit. Si figuris quibuslibet, exempli cauſſa 1, 2, 3, 6, 8, &c. ad dexteram addas cifram 0, habebis numeros 10, 20, 30, 60, 80, &c., ſcilicet decem, viginti, triginta, ſexaginta, octoginta, &c.

Definitio II.

Unitas dicitur ea denominatio, per quam quælibet res dicitur una. 2.
Eſt autem unitas omnis numeri principium.

Definitio III.

Numerus eſt duarum, vel plurium unitatum multitudo, ſive aggre- 3.
gatum; unde primus numerus eſt duo, ſecundus tres, &c.

Definitio IV.

Numerus dicitur *par*, quando bifariam, ideſt in duas partes æqua- 4.
les dividi poteſt; ideoque numeri pares, ſunt 2, 4, 6, 8, 10, 12, & alii infiniti.

Definitio V.

Numerus vero *impar* eſt, qui bifariam dividi nequit. Sic numeri 5.
3, 5, 7, 9, 11, &c. impares ſunt, quia in duas æquales partes dividi nequeunt.

Definitio VI.

Præcipuæ *Arithmeticæ partes, ſeu operationes* ſunt Additio, Subtra- 6.
ctio, Multiplicatio, & Diviſio.

Definitio VII.

7. *Additio* eſt duorum, vel plurium numerorum in unam ſummam collectio: ſive datis duobus, aut pluribus numeris, eſt inventio alterius numeri, cujus partes omnibus datorum numerorum partibus ſimul ſumptis ſint æquales. Numerus, qui ex datorum additione conflatur, eorumdem *Summa, vel Aggregatum* appellatur.

Exemplum.

Sint numeri addendi 4, 3, 2, erit ipſorum ſumma 9; hic enim numerus tot continet unitates, quot ſunt in datis numeris 4, 3, 2, ſimul ſumptis.

Definitio VIII.

8. *Subtractio* eſt inventio exceſſus, quo numerus major minorem ſuperat; ſive eſt inventio defectus, quo minor numerus a majore deficit. Exceſſus autem ille, ſive defectus, datorum numerorum *Differentia, vel Reſiduum* dicitur.

Exemplum.

Subtrahendus ſit numerus 3 a numero 8, differentia, ſeu reſiduum erit numerus 5: etenim numerus 8 per quinque unitates excedit numerum 3; ſive, quod idem eſt, numero 3 quinque deficiunt unitates, ut adæquet numerum 8; quare eorumdem numerorum differentia eſt numerus 5.

Definitio IX.

9. *Multiplicatio* eſt datum numerum toties ſumere, quot in alio etiam dato numero continentur partes, ſeu unitates.

Numeri dati dicuntur *Factores, vel Multiplicatores;* is vero numerus, qui ab ipſorum multiplicatione producitur, *Factum, ſeu Productum* appellatur.

Multiplicatorum major, vulgo *Multiplicandus* dicitur, minor vero *Multiplicans, vel Multiplicator* vocatur.

Exemplum.

Sit numerus multiplicandus 4, & multiplicator 2, erit ipſorum productum 8; numerus enim 8 toties continet numerum 4, quot ſunt unitates in multiplicatore 2: Seu viciſſim productum, ſive factum 8 toties continet multiplicatorem 2, quot ſunt unitates in altero multiplicatore 4.

De-

Definitio X.

Diviſio eſt ea Arithmetices operatio, in qua invenitur quoties datus 10.
numerus alium datum numerum contineat.

Datorum primus vocatur *Numerus Dividendus*, alter vero *Diviſor* dicitur, & numerus inventus *Quotiens*, *Quotus*, vel *Exponens* diviſionis appellatur.

Exemplum.

Sit numerus dividendus 6, & diviſor 2, quotiens erit 3; cùm numerus 6 ter numerum binarium contineat.

PROBLEMA PRIMUM.

Datum quemvis numerum Arithmeticis figuris exprimere. 11

Reſolutio.

Arabes, vel Indi, qui figuras, ſeu notas Arithmeticas invenerunt, eas hac ratione, ſeu lege inſtituerunt, ut ſcilicet quævis nota primo loco, ſive in prima ſede locata, ſimplices unitates ſignificaret; atque (a dextera ſemper procedendo verſus ſiniſtram ſcribentis) nota in *ſecunda ſede* locata tot decades exprimeret, quot unitates continet; in *tertia* ſede tot centenaria, quot unitates habet; in quarta ſede tot unitates millium, in quinta decades millium, & in ſexta millium centenaria. Nota vero in ſeptima ſede locata decies centena millia, ſeu vulgo milliones ſignificaret, quot unitates habet; in octava decades millionum, in nona millionum centenaria, in decima ſede millionum millia, in undecima decades mille millionum, & in duodecima ſede tot centena millia millionum, quot unitates continet figura in ea ſede locata.

Deinde, eodem ordine procedendo, in aliis ſex conſequentibus ſedibus poſuerunt billionum unitates, decades, centenaria, millia, decades millium, & centenaria millium billionum. Deinceps ſex trillionibus ſedes tribuerunt, ſex conſequenter quatrillionibus, ſex quinquillionibus, &c.

Quapropter unitas in prima ſede poſita unam tantum rem ſignificat; ſi in ſecunda ſede ſcribatur, decem ex iiſdem rebus indicabit, in tertia ſede centum, in quarta mille; ſi vero locata fuerit in decima ſede mille, milliones exprimet, atque ita deinceps.

Similiter nota 2 in prima ſede poſita duas res, ſeu unitates ſignificat, in ſecunda ſede viginti unitates indicat, in tertia ſede ducenas unitates, in quarta duo millia exprimit, in quinta viginti millia, &c. Idem de reliquis figuris intelligatur.

Exem-

Exemplum I.

Sit numerus octoginta ſeptem Arabicis figuris exprimendus. Hic numerus continet octo Decades, & ſeptem unitates; ergo primo loco, ſive in prima ſede ſcribatur figura 7; deinde ad ſiniſtram, nimirum in ſecunda ſede ponatur nota 8, hoc pacto 87; atque hac ratione indicabitur numerus octoginta ſeptem.

Exemplum II.

Numerus exprimendus ſit ſex mille nongenta quinquaginta quatuor. Cum in hoc numero contineantur quatuor unitates, quinque decades, novem centenaria, & ſex millia; in prima ſede ſcribatur nota 4, atque (ſemper a dextera procedendo verſus ſiniſtram *ſcribentis*) in ſecunda ſede ponatur figura 5, in tertia, quæ eſt centenariorum ſedes, ſcribatur figura 9. Tandem quarto loco, ſive in quarta ſede ſcribatur figura 6, nempe hoc modo 6954; & hac lege diſpoſitæ, numerum ſex millia nongenta quinquaginta quatuor indicabunt.

Exemplum III.

Similiter numerus octingenta quinquaginta tria millia ducenta nonaginta ſeptem ſic exprimitur 853297.

Exemplum IV.

Si datus numerus ſit octingenta, in quo non habentur nec ſimplices unitates, neque decades, ſed tantum octo centenaria; cumque centenariorum ſedes ſit tertia, ideo tam in prima, quam in ſecunda ſede ponatur cifra 0, & in tertia ſcribatur figura 8; unde 800 numerum octingenta indicabit.

Exemplum V.

Eadem prorſus ratione ad quemvis alium numerum exprimendum ſcribatur ſemper cifra 0 in iis ſedibus, quæ figuris carent. Itaque numerus ſex mille quadraginta, qui non habet nec ſimplices unitates, neque centenaria, ita ſcribatur 6040.

Item numerus ſeptuaginta milliones, mille, & triginta duo, in quo nec centenaria ſunt, nec decades millium, nec centenaria millium, neque unitates millionum, hac ratione ſcribatur 70001032, atque ita de reliquis.

PRO-

PROBLEMA SECUNDUM.

Datum quemvis numerum Arabicis figuris deſcriptum enunciare. 12.

Reſolutio I.

Datus ſit numerus quilibet exprimendus 538462. Ex dictis in antecedenti Problemate evidens eſt notam 2 occupare ſedem unitatum ſimplicium, notam 6 poſitam eſſe in decadum ſede, 4 in ſede centenariorum, 8 in ſede unitatum millium, 3 in ſede decadum millium, & 5 in ſede centerariorum millium; adeoque ſiniſtrorſum incipiendo, & verſus dexteram procedendo, ſic exprimitur: quingenta triginta octo millia, quadringenta ſexaginta duo.

Eadem prorſus ratione numerus 200034 enunciatur ducenta millia triginta quatuor, cum figura 2 ſit in ſexta ſede, quæ eſt centenariorum millium; nota vero 3 in decadum ſimplicium ſede, & nota 4 in ſede unitatum ſimplicium.

Reſolutio II.

Ad numeros vero facilius exprimendos, præſertim ſi prolixiores ſint, 13.
hac ratione procedendum *erit*.

Primo a dextera procedendo verſus ſiniſtram, datus numerus in *periodos*, ſeu membra dividatur, ſecernendo virgula ternas quaſvis figuras.

Secundo ſi datus numerus pluribus quam ſex conſtat notis, ſupra ſeptimam ſcribatur 1; intermiſſiſque quinque figuris, ſupra notam decimam tertiam ponatur 2. Item intermiſſis iterum quinque figuris, ſcribatur 3 ſupra notam undevigeſimo loco poſitam; atque ita deinceps, relictis ſemper quinque notis, ſcribantur numeri 4, 5, 6, &c. ſupra notas vigeſimo quinto, trigeſimo primo, trigeſimo ſeptimo loco poſitas, &c.

Atque hac methodo datus numerus dividatur in membra, quorum unumquodvis ſex continet notas (excepto primo ad ſiniſtram poſito, quod aliquando unam, vel duas, vel tres, vel quatuor, vel quinque tantum notas continere poteſt). Præterea quilibet Senarius diviſus eſt in duo Ternaria, quorum primum dextrorſus continet unitates, decades, & centenaria dati Senarii; alterum vero ternarium ſiniſtrorſum poſitum continet millia, ſeu unitates millium, decades millium, & centenaria millium ejuſdem Senarii.

Primus Senarius eſt unitatum, ſecundus continet milliones, tertius milliones millionum, ſeu biliones, quartus triliones, quintus quatriliones, &c.

Quapropter ſex notæ ſimul exprimendæ ſunt, atque prolata nota, ſupra quam poſita fuit unitas, pronuncietur vox millio, ubi poſitus fuit numerus 2, pronuncietur bilio, & ſic deinceps. Ubi vero ſola virgu-

virgula invenitur, ſemper proferatur vox mille. Denique, ut ante dictum eſt, enunciatur numerus incipiendo a ſiniſtra, & verſus dexteram progrediendo. Quæ omnia ſequentibus exemplis illuſtrata facilius percipientur: Artes enim, ut inquit Cl. Nevvtonus, exemplis facilius, quam præceptis addiſcuntur.

Sit datus numerus 26312, 567928, 543, qui dividatur in periodos, ut ante dictum eſt, ponatur nempe una virgula inter notas 5, & 8, alia inter 5, & 2; præterea ponatur 1 ſupra notam 7 ſeptimo loco poſitam, & numerus 2 ſupra notam 6 in tredecima ſede locatam; atque datus numerus hac ratione in membra diviſus, facillime ſic legitur: viginti ſex biliones, tercenti duodecim mille, quingenti ſexaginta ſeptem milliones, nongenta viginti octo millia, quingenta quadraginta tria.

Similiter numerus 59846, 070030, 000070, 356 ſic enunciatur: quinquaginta novem triliones, octingenti quadraginta ſex mille, ſeptuaginta biliones, triginta millia milliones, ſeptuaginta millia, tercenta quinquaginta ſex.

Item numerus 128, 000004, 003200, 005000, 000, ita exprimitur: centum viginti octo millia triliones, quatuor millia, & tres biliones, ducenta millia, & quinque milliones.

PROBLEMA TERTIUM.

14. *Numeros integros in unam ſummam colligere.*

Reſolutio I.

Primo dati numeri ordinatim ſcribantur, alius nempe infra alium, ita ut unitates unius ſint ſub unitatibus alterius, decades ſub decadibus, centenaria ſub centenariis, & millia millibus ſibi invicem reſpondeant, atque ita deinceps.

Secundo infra eoſdem numeros ducatur lineola.

Tertio in unam ſummam colligantur ſimplices unitates, ideſt notæ illæ, quæ ſunt in prima columna ad dexteram ſcribentis poſita; atque ſi ipſarum ſumma non excedit numerum 9, ſcribatur inventa ſumma infra lineam, & ſub eadem columna. Eadem operatio deinceps fiat in ſecunda columna, in tertia, in quarta, &c., & habebitur infra lineam quæſita ſumma.

Sint numeri addendi 123, 231, 542, qui ordinatim ſcribantur, ut diximus in numero primo, & ducta lineola, inveniatur ſumma, quæ erit 896.

$$\begin{array}{r} 123 \\ 231 \\ 542 \\ \hline 896 \end{array}$$

Nam unitates 2, 1, 3 in prima columna in unum collectæ faciunt 6; ſcribo itaque 6 infra lineam, & ſub eadem prima columna. Deinde in ſecunda columna decades 4, 3, 2 ſimul junctæ dant ſummam 9, quæ ſcribatur etiam infra lineam, & ſub

eadem

eadem ſecunda columna. Tandem centenaria 5, 2, 1 faciunt octo centenaria; proindeque ſcribatur 8 infra lineam in tertia ſede, ideſt ſub tertia columna, & erit 896, ideſt octingenta nonaginta ſex datorum numerorum ſumma.

Similiter numerorum 4200, & 5060 ſumma erit 9260, videlicet novem millia ducenta ſexaginta.

4200
5060
9260

Quarto ſi autem cujuſvis columnæ ſumma numerum novem excedat, atque unam vel plures decades contineat, tunc infra lineam, & ſub eadem columna ſcribatur id, quod remanet ſupra decades, vel ſcribatur cifra 0, ſi nihil ſupra decades ſumma contineat.

Deinde ſequentis columnæ numeris tot addantur unitates, quot fuerunt decades in præcedenti columna inventæ.

Exemplum.

In unam ſummam colligendi ſint numeri 5146, 4375, 7624, 238. Primo ſcribantur ut ante dictum eſt, eademque conditione, ut unitates ſub unitatibus jaceant, decades decadibus reſpondeant, centena centenis, &c; atque ducta linea, in unam ſummam redigantur numeri primæ columnæ, ſcilicet unitates 8, 4, 5, 6, quæ ſimul junctæ dant ſummam 23; nam 8 plus 4 faciunt 12, & 12 plus 5 dant 17, & 17 plus 6 efficiunt 23, quæ ſumma 23 continet duas decades, & tres unitates; ſcribatur itaque nota 3 infra lineam in columna unitatum, & decades 2 cum aliis decadibus 3, 2, 7, 4 colligantur, & erit 18 decadum ſumma. Decem vero decades unum centenarium efficiunt; ergo inventæ ſummæ 18 ſcribatur nota 8 infra lineam in decadum ſede, & 1, ſcilicet una decas decadum, ſeu unum centenarium aliis centenariis 2, 6, 3, 1 adjungatur, & erit 13 centenariorum ſumma. Quoniam vero decem centenaria unum mille conſtituunt, ideoque inventæ ſummæ 13 ſcribatur nota 3 in tertia columna, & infra lineam, atque 1, videlicet unum mille aliis millibus 7, 4, 5 adjungatur, erit 17 millium ſumma. Ponatur itaque 7 infra lineam ſub quarta columna, videlicet in millium ſede, & 1, una nempe decas millium ſcribatur ad ſiniſtram ejuſdem 7, ſcilicet in quinta ſede, quæ eſt ſedes decadum millium; atque datorum numerorum ſumma erit 17383, nimirum ſeptemdecim millia trecenta octoginta tria.

5146
4375
7624
238
17383

Similiter numerorum 3427, 5035, 8247 ſumma erit 16709, ideſt ſexdecim millia ſeptingenta novem.

3427
5035
8247
16709

Item numerorum 32050, 6040, 2070, 40 ſumma erit 40200, nempe quadraginta millia ducenta.

32050
6040
2070
40
40200

Demonſtratio.

15. Additio, per Definitionem ſeptimam hujus Libri, eſt inventio numeri, cujus partes, ſeu unitates adæquent datorum numerorum partes omnes ſimul ſumptas; numerus vero 896 in primo exemplo, ex conſtructione facta, tot continet unitates, decades, & centenaria, quot ſunt unitates, decades, & centenaria in datis numeris 123, 231, 542 ſimul ſumptis; ergo numerus 896 eſt ſumma ſeu aggregatum eorumdem numerorum 123, 231, 542.

Quod erat faciendum, & demonſtrandum.

Eodem ratiocinio demonſtratur reliquas ſummas rite factas eſſe.

Reſolutio II.

16. Primo ordinentur numeri alius infra alium, & ducatur lineola infra eoſdem, ut ante dictum fuit.

Secundo operatio procedat a ſiniſtra verſus dexteram, atque nullus numerus mente retineatur, ſed tota cujuſvis columnæ ſumma ſtatim infra lineam, & ſub eadem columna ſcribatur, ſi non excedit numerum 9; ſi autem excedit numerum 9, & unam vel plures decades continet, tum id quod remanet ſupra decades, ſub eadem columna deſcribatur, & decades ſcribantur in altera ſede ad ſiniſtram.

Sint numeri in unam ſummam colligendi 58748, 94816, 5232, 803; a ſiniſtra incipiendo dico 9 plus 5 decades millium faciunt 14, ſcribo infra lineam ſummam hanc 14, ea tamen conditione, ut nota 4 ſit ſub eadem columna decadum millium, & unitas, ſeu 1 ponatur ad ſiniſtram in ſequenti ſede, quæ eſt centenariorum millium. Deinde colligo millia 5 cum 4, faciunt 9, & 9 cum 8 faciunt 17, quem ſcribo infra lineam, ita ut nota 7 ſit ſub columna millium, & 1 infra notam 4 primæ ſummæ 14. Præterea colligo centenaria 8 plus 2 plus 8 plus 7, quæ efficiunt ſummam 25, atque ſcribo 5 infra lineam ſub eadem centenariorum ſede, & 2 in ſequenti ſede millium, ſcilicet infra notam 7 præcedentis ſummæ 17. Eodem modo in unam ſummam redigo decades 0, 3, 1, 4, quæ faciunt 8, quem ſcribo infra lineam in ſede decadum. Tandem in unam ſummam collectis unitatibus 3, 2, 6, 8, quæ dant ſummam 19, ſcribatur 9 in ſede unitatum infra lineam, & 1 in decadum ſede, nimirum infra notam 8 præcedentis ſummæ decadum. Tertio ducta alia recta linea infra numeros inventos, fiat altera additio horum numerorum; atque datorum numerorum ſumma erit 159599, ideſt centum quinquaginta novem millia, quingenta nonaginta novem.

58748
94816
5232
803

147589
12 1

159599

Corollarium.

Cum igitur duobus modis numerorum additio perficiatur, hinc nos additionem rite perfectam eſſe judicamus, ſi utroque modo facta, eandem ſummam inveniamus. 17.

Præterea additionis examen etiam hac ratione fieri poteſt: nimirum eadem additio repetatur, ſed ordine inverſo, ut ſi prius ab imo ſurſum proceſſeris, deinde a ſummo deorſum deſcendas; atque ſi eadem fuerit ſumma utroque modo inventa, nullum errorem irrepſiſſe probabile eſt.

PROBLEMA QUARTUM.

Numerum quemvis integrum ex alio integro majore ſubtrahere. 18.

Reſolutio.

Primo numerus minor infra majorem, a quo ſubducendus eſt, ordinate ſcribatur; ita ut unitates ſint ſub unitatibus, decades ſub decadibus, centena ſub centenis, &c, ut de additione dictum eſt numero primo Problematis antecedentis; atque infra eoſdem numeros ducatur lineola.

Secundo, dextrorſum incipiendo, ſubtrahantur unitates numeri inferioris ab unitatibus numeri ſuperioris, decades ex decadibus, centena ex centenis, &c. & id quod remanet in qualibet ſede, ſcribatur infra lineam.

Cum vero nota ſuperior inferiori eſt æqualis, tunc ponitur cifra 0 infra lineam. Sit exemplum: Subtrahendus ſit numerus 86524 ex numero 137596. Scribatur in primis numerus minuendus 137596, & infra eundem ordinatim ſcribatur numerus ſubtrahendus 86524, ita ut 4 unitates ſint ſub 6 unitatibus, decades 2 ſub decadibus 9, &c.; atque inferius ducta lineola, primo ſubtrahantur unitates 4 ex unitatibus 6, & *reſiduum 2 ſcribatur infra lineam in ſede* unitatum. Secundo ſubducantur decades 2 ex decadibus 9, & reliquum 7 ponatur infra lineam in decadum ſede. Tertio ſubductis 5 centenariis ex 5 centenariis, nihil remanet, proindeque ſcribatur 0 infra lineam in tertia ſede.

137596
86524
51072

Quarto ſubtrahantur 6 millia ex 7 millibus, & reſiduum 1 ponatur infra lineam in quarta ſede. Tandem quia 8 decades millium ex tribus millium decadibus ſubtrahi nequeunt, ſubtrahatur 8 ex 13, & reſiduum 5 infra lineam ſcribatur in eadem ſede decadum millium; adeoque datorum numerorum differentia, ſeu reſiduum erit 51072.

Tertio ſi in ſuperiori, ſeu majori numero, notæ inveniantur, quibus 0, aut nullæ minoris, ſeu inferioris numeri reſpondeant; tunc

illæ etiam infra lineam ſcribantur, ut ex numero 3058760 ſubtrahendo numerum 18040, reſiduum erit 3040720.

	3058760
	18040
	3040720

Quarto tandem: ſi aliqua figura, ſeu nota inferioris numeri ſubduci nequit a reſpondenti figura numeri ſuperioris, quia illa major eſt; tum ſuperiori notæ addita intelligatur decas una, & ſubducta inferiori nota, ſcribatur reſiduum infra lineam: deinde ſequens nota ſuperior ad ſiniſtram poſita unitate minuitur, vel (quod idem eſt) nota ſubſequens numeri inferioris unitate augetur.

Ex numero majore 436052 ſubtrahendus ſit numerus 352064. Poſito numero 352064 ordinatim infra numerum 436052, atque ducta lineola, auferatur 4 ex 2, quod fieri nequit; proindeque ipſi numero 2 addita intelligatur una decas, fiet 12, ex quo ſubtrahatur 4, & remanet 8, qui ſcribatur infrà lineam. Deinde, vel ſubſequens nota inferior 6 unitate augeatur, & fiet 7, qui nequaquam ſubduci poteſt ex figurà ſuperiore 5, ideoque ipſi 5 addita intelligatur una decas, & habebitur 15, a quo demto numero 7, reſiduum erit 8; vel ſubſequens nota ſuperior 5 unitate minuatur, & remanebit 4, a quo ſubtrahi non poteſt inferior nota 6; eidem igitur numero 4 addatur una decas, fiet 14, a quo ſubducto numero 6, habetur idem reſiduum 8 infra lineam ſcribendum. Poſtea ſubſequenti inferiori notæ 0 addatur 1, fiet 1, quæ ex ſuperiore nota 0 auferri nequit, ideoque ipſi 0 addatur decas, & habebitur 10, a quo auferatur 1, & reliquum 9 ponatur infra lineam. Conſequenter addatur 1 ſubſequenti inferiori notæ 2, & fiet 3, quo ſubducto ex 6, remanebit 3, qui ſcribatur infra lineam in eadem ſede. Deinde ſubtraho 5 ex 13 (cum 5 ex 3 ſubduci nequeat), & reſiduum 8 infra lineam pono, atque transfero 1 addendum inferiori numero 3, & fit 4, quo ſubducto ex ſuperiore nota 4 nihil remanet; proindeque ponenda eſſet cifra 0, ſed inutile eſt eam in fine operationis ſcribere. Ergo reſiduum erit 83988.

	436052
	352064
	83988

Similiter ſubtrahendo numerum B ex numero A, invenitur reſiduum C. Nam ablato 5 ex 8, reſiduum erit 3 infra lineam ſcribendum. 1 ex 10, reliquum eſt 9; atque iterum 1 ex 10, reſiduum eſt 9. 3 ex 4, reſiduum eſt 1. tum 6 ex 10, reliquum eſt 4. 10 ex 11, reſiduum eſt 1. Tandem 1 ex 7, reliquum eſt 6.

A	7104008
B	962015
C	6141993

Demonſtratio.

19. Subtractio, per Definitionem octavam hujus Libri, eſt inventio exceſſus, quo numerus major minorem ſuperat; ſed in primo hujus Problematis exemplo reſiduum inventum 51072 eſt exceſſus, quo numerus major 137596 minorem 86524 ſuperat; etenim ſubtrahendo 4 unitates a 6 unitatibus, in reſiduo poſuimus 2 unitates, qui numerus 2 eſt exceſſus, quo numerus 6 numerum 4 excedit, atque ita deinceps.

Er-

Ergo numerus 51072 eſt reſiduum, ſeu differentia inter datos numeros 137596, & 86524. Eodem ratiocinio reliqua exempla demonſtrantur.

Corollarium.

Quoniam reſiduum eſt id, quod numero minori deficit, ut adæquet numerum majorem; ſi igitur in unam ſummam colligantur numerus minor, & reſiduum, eadem ſumma æqualis erit numero majori. 20.

Quapropter ſubtractionis examen fit addendo reſiduum inventum cum numero minori ſubtracto, atque ſi eorundem ſumma fuerit æqualis numero majori, nullum irrepſiſſe errorem pro certo habeas. Ut in primo exemplo, addendo reſiduum 51072 cum numero ſubtracto 86524, oritur ſumma 137596, quæ adæquat numerum majorem; adeoque concludendum eſt ſubtractionem rite factam fuiſſe.

PROBLEMA QUINTUM.

Datum quemvis numerum integrum per alium integrum numerum multiplicare. 21.

Numerorum ſimplicium (ſimplices dicuntur numeri minores numero decem) multiplicatio memoriter perdiſcenda eſt; ideoque ſequens Tabula memoriæ mandetur.

1 in	1 facit	1
2	1	2
2	2	4
2	3	6
2	4	8
2	5	10
2	6	12
2	7	14
2	8	16
2	9	18
3	3	9
3	4	12
3	5	15
3	6	18
3	7	21
3	8	24
3	9	27
4	4	16
4	5	20
4	6	24
4	7	28

4

4	8	32
4	9	36
5	5	25
5	6	30
5	7	35
5	8	40
5	9	45
6	6	36
6	7	42
6	8	48
6	9	54
7	7	49
7	8	56
7	9	63
8	8	64
8	9	72
9	9	81

Si numeri ad invicem multiplicandi pluribus conſtant notis, tunc Primo ſcribatur numerus multiplicator infra numerum multiplicandum, eodem ordine, quo eos ſcribere docuimus numero 1 Problematis Tertii, & infra eoſdem numeros ducatur linea.

Secundo quando multiplicator unicam habet notam, tum illa in ſingulas numeri multiplicandi figuras multiplicetur, a dextera procedendo verſus ſiniſtram; atque ſi productum quodvis peculiare non excedit numerum 9, totum ponatur infra lineam: ſi vero unam, aut plures decades contineat, tunc infra lineam ſcribatur tantum id, quod remanet ſupra decades; ſi autem productum nihil præter integras decades contineat, infra lineam ponatur 0, & tot reſerventur unitates ſequenti producto adjiciendæ, quot decades continet illud productum Sit

Exemplum I.

Numerus multiplicandus ſit 18521, & multiplicator 7, quem ſcribo infra unitatem alterius numeri, atque ducta lineola, multiplico 7 in 1; ſed unitas ſepties ſumpta facit ſeptem, ſcribo itaque 7 infra lineam: Deinde numerus 2 ſepties ſumptus facit 14, ſcribo 4 infra lineam in ſecunda ſede, & 1, ſive unam decadem reſervo ſequenti producto addendam, ob unam decadem hujus producti 14. Tum 5 ſepties ſumptus facit 35, huic addo 1 reſervatum ex antecedenti producto, & fit 36; ſcribo 6 infra lineam in tertia ſede, & reſervo 3, tres nempe centenario-

18521
7
129647

nariorum decades, ſive tria millia ſequenti producto addenda. Poſtea numerus 8 ſepties ſumptus producit 56, huic addo 3, & fit 59; pono 9 infra lineam, & retineo 5. Tandem 1 ſepties ſumptus facit 7, huic addo 5 ſervatum ex præcedenti producto, & fit 12, quem totum infra lineam ſcribo: adeoque factum, ſeu productum ex numero 18521 multiplicato per numerum 7 erit 129647.

Tertio ſi multiplicator duas, vel plures habeat notas, tunc ſingulæ ejus notæ ſeparatim multiplicent ſingulas numeri multiplicandi notas; ſed producta ea ratione infra lineam deſcribantur, ut (invento producto primæ notæ, ut in antecedenti exemplo) primum productum ſecundæ notæ inferioris numeri in primam numeri ſuperioris notam ſcribatur in decadum ſede, ſcilicet directe ſub ipſa ſecunda nota; reliqua vero producta ejuſdem notæ ordinatim ſiniſtrorſum ſcribantur, ut in ſuperiori exemplo. Similiter primum productum tertiæ notæ directe ponatur ſub ipſa tertia nota, ideſt in centenariorum ſede; atque ita deinceps, ut videre eſt in ſequentibus exemplis.

Quarto ducatur linea infra inventa producta, quæ in unam ſummam colligantur, atque erit eadem ſumma quæſitum productum datorum numerorum.

Exemplum II.

Sit numerus *multiplicandus* 3624, & multiplicator 23, qui ordinatim ſcribantur, ut antea dictum fuit numero primo; atque ducta linea, dico, numerus 4 ter ſumptus producit 12, ſcribo 2 infra lineam, & 1 retineo ſequenti producto addendum: deinde 2 ter ſumptus facit 6, huic addo 1 ex alio producto reſervatum, & fit 7, quem infra lineam pono in ſecunda ſede. Poſtea 6 ter ſumptus dat productum 18; ſcribo igitur 8 in tertia ſede infra lineam, & 1 retineo ſequenti producto adjungendum. Tandem multiplico quartam figuram 3 per eundem multiplicatorem 3, & producto 9 addo unum ex antecedenti producto retentum, & fit 10, quem totum infra lineam ſcribo, ita ut 0 ſit in quarta ſede, & 1 in quinta: atque completum erit productum ex prima nota 3 in totum numerum multiplicandum. Multiplicetur deinde numerus multiplicandus 3624 per ſecundam notam 2 multiplicatoris 23, & primum productum ex 2 in 4, ſcilicet 8, ſcribatur infra lineam directe ſub ipſo multiplicatore 2, videlicet infra ſecundam notam 7 præcedentis producti, ideſt in decadum ſede; nam multiplicator 2 non ſignificat duas unitates, ſed duas decades, ſeu viginti unitates, eſt enim in ſecunda ſede; proindeque ſuperior unitatum figura 4 non bis, ſed vicies ſumenda eſt; & numerus 4 vicies ſumptus producit 80, ideoque productum 8 ponendum eſt in ſecunda ſede, in qua octo decades, ſeu octoginta unitates ſignificat, ut evidens eſt ex primo Problemate (. Deinde dicatur 2 in 2, & productum 4 ponatur infra lineam in ter-

```
 3624
   23
-----
10872
7248
-----
83352
```

tia

tia ſede. Poſtea 2 in 6 dat 12, ſcribatur 2 infra lineam in quarta ſede, videlicet ad ſiniſtram præcedentis notæ 4, & 1 ſervetur addendum ſequenti producto ex 2 in 3, quod eſt 6, huic addatur 1 ante retentum, & fit 7, qui ſcribatur in quinta ſede, nempe ad ſiniſtram præcedentis notæ 2. Tandem ducta linea infra inventa producta, in unam ſummam redigantur eadem producta (Problemate Tertio), quæ erit 83352; adeoque productum, quod oritur ex ductu numeri 23 in numerum 3624 eſt 83352.

Exemplum III.

Eadem prorſus ratione multiplicando numerum 46080 per numerum 5030 oritur productum 231782400. Nam totus numerus ſuperior multiplicatus per 0 dat productum 0, quod ſcribo infra lineam in ſede unitatum. Deinde 3 in 0 facit etiam 0, quam cifram pono in ſecunda ſede. Poſtea 3 in 8 producit 24, ſcribo 4 in tertia ſede, & retineo 2 adjungenda ſequenti producto ex 3 in 0, quod eſt 0, cui addo 2, & fit 2; ſcribo itaque 2 in quarta ſede. Dein 3 in 6 producit 18, & pono 8 in quinta ſede, atque 1 reſervo ſequenti producto adjiciendum. 3 in 4 producit 12, cui addo 1, & fit 13, quem totum pono infra lineam, nempe 3 in ſexta, & 1 in ſeptima ſede. Tertio loco multiplico totum numerum ſuperiorem per tertiam figuram 0 multiplicatoris, & productum 0 ſcribo infra lineam in tertia ſede, ideſt ſub nota 4 jam inventi producti. Tandem multiplico per quartam figuram 5, & 5 in 0 facit 0; pono igitur 0 ad ſiniſtram præcedentis, ideſt in quarta ſede, directe ſub ipſo multiplicatore 5. Deinde 5 in 8 facit 40, pono 0 in quinta ſede, & reſervo numerum 4 addendum ſequenti producto ex 5 in 0, quod productum eſt 0, cui adjungo 4, & ſummam 4 pono in ſexta ſede. 5 in 6 producit 30, pono 0 in ſeptima ſede, & mente retineo 3 addendum poducto 20 orto ex ductu 5 in 4, & fit 23, quem totum ſcribo in octava, & nona ſede. Atque ducta linea, & in unam ſummam collectis hiſce peculiaribus productis, erit ea ſumma quæſitum productum 231782400.

46080
5030
1382400
2304000
231782400

Exemplum IV.

Item multiplicando numerum 3542 per numerum 346, oritur productum 1225532.

3542
346
21252
14168
10626
1225532

Demonſtratio.

22\. Productum, ſeu factum in quavis numerorum multiplicatione (Definitione 9.a) toties continere debet unum ex multiplicatoribus, quot ſunt

ſunt unitates in altero multiplicatore: atqui in primo exemplo productum 129647 toties continet numerum multiplicandum 18521, quot ſunt unitates in numero multiplicatore 7; *nam* numerus 18521 ſepties infra ſe ipſum ordinate ſcribatur, & ducta linea invenietur ſumma, quæ erit idem numerus 129647: ergo hic numerus eſt productum ex numero 7 in numerum 18521.

18521
18521
18521
18521
18521
18521
18521
129647

Eodem modo in ſecundo exemplo evincitur numerum 83352 eſſe productum ex numero 23 in numerum 3624. Si enim numerus 3624 viginti tres vices infra ſe ipſum ordinatim ſcribatur, & fiat additio, invenietur ſumma 83352; proindeque productum duorum numerorum 3624, & 23, eſt numerus 83352. Eadem demonſtratio fieri poteſt de alio quovis exemplo.

Multiplicationis examen fit dividendo productum per unum ex factoribus; atque ſi pro quotiente alter factor inveniatur, certum erit multiplicationem rite factam fuiſſe; ſed prius intelligendum eſt qua ratione perficiatur diviſio. Sit igitur 23.

PROBLEMA SEXTUM.

Numerum quemlibet integrum per alium integrum numerum dividere. 24.

Reſolutio.

In qualibet diviſione duo ſunt dati numeri (Definitione 10. hujus Libri), quorum unus numerus Dividendus vocatur, & alter Diviſor dicitur; tertius vero numerus, qui diviſionis ope quæritur, Quotiens, Quotus, vel Exponens diviſionis appellatur, quia exponit quoties diviſor in dividendo contineatur.

Primo ſi diviſor, & dividendus ſunt ambo numeri ſimplices, facillime invenitur quotiens; ut dividendo numerum 6 per numerum 3, quotiens eſt 2: dividendo numerum 8 per 2, quotiens eſt 4.

Secundo ſi diviſor eſt numerus ſimplex, & dividendus duabus, vel pluribus conſtat notis, tunc ita procedendum erit: ſcribatur in primis numerus dividendus, atque juxta eundem relicto dextrorſum aliquo intervallo ducatur lineola a ſummo deorſum, & prope eandem lineam, & verſus dexteram ſcribatur diviſor, & infra diviſorem ducatur alia linea tranſverſa a ſiniſtra dextrorſum. Deinde ſiniſtrorſum incipiendo, ſingulæ numeri dividendi figuræ per datum diviſorem dividantur, & ponantur quotientes ſub linea infra diviſorem ducta, ut videre eſt in ſequentibus exemplis.

Exemplum I.

Sit numerus dividendus 64820, & diviſor 2. Scribatur in primis numerus dividendus 64820, atque dextrorſum ducatur a ſummo deor-

ſum linea AB, poſtea ſcribatur diviſor 2, & infra diviſorem ducatur linea tranſverſa BC. Deinde ſiniſtrorſum incipiendo dico 2 in 6 ter continetur; ſcribo itaque primam quotientis notam 3 ſub linea BC infra diviſorem. Item 2 in 4 bis continetur, pono igitur 2 ad dexteram præcedentis notæ 3. Poſtea dividendo 8 per 2, invenio quotientem 4, quem ſcribo ſub diviſore poſt alias duas notas jam inventas. Tum 2 in 2 ſemel continetur, unde pono 1 pro quarta quotientis nota. Tandem 2 in 0 non continetur, proindeque ſcribo 0 pro quinta quæſiti quotientis nota, & perfecta erit diviſio; adeoque dividendo numerum 64820 per 2, quotiens erit 32410.

```
        A
64820 | 2
      B 32410 C
```

Exemplum II.

Numerus dividendus ſit 1380, & diviſor 4, qui ſcribantur, ut antea dictum fuit. Deinde cum diviſor in prima dividendi figura 1 non contineatur, ſumantur duæ primæ figuræ, dividatur nempe numerus 13 per 4; ſed 4 in 13 tres vices tantum continetur; ergo ſub diviſore, & infra lineam ponatur numerus 3, qui multiplicetur per diviſorem 4, & productum 12 infra membrum diviſum 13 ſcribatur, & inferius ducta parva lineola, ſubtrahatur (Problemate 4.) 12 ex 13, & ad dexteram reſidui 1 deſcendatur tertia nota 8 numeri dividendi, & fiet 18 membrum dividendum, in quo diviſor 4 non continetur quinquies, quia 4 in 5 producit numerum 20 majorem numero 18, ſed tantum quater continetur, adeoque ponatur 4 poſt notam 3 in quotiente; poſtea multiplicetur inventus numerus 4 in diviſorem 4, & productum 16 ſcribatur ſub membro diviſo 18, a quo ſubtrahatur, & reſiduo 2 dextrorſum adjungatur ultima dividendi nota 0, & fiet membrum dividendum 20, in quo diviſor 4 quinquies continetur; ſcribatur itaque quotiens 5 pro tertia quæſiti quotientis nota, atque ducto 5 in 4, productum 20 ſubducatur a membro diviſo 20, reſiduum erit 0, & completa erit diviſio. Quapropter dividendo numerum 1380 per 4, quotiens eſt 345.

```
1380 | 4
12     345
 18
 16
  20
  20
   0
```

Tertio ſi in progreſſu operationis membrum dividendum inveniatur minus diviſore, tunc in quotiente ponatur cifra 0; & alia numeri dividendi figura deſcendatur. Si autem addita alia dividendi figura diviſor nondum contineatur in eodem membro dividendo, tunc alia cifra 0 in quotiente ponatur, & alia deſcendatur dividendi figura; atque hæc operatio toties iteretur, donec membrum dividendum contineat diviſorem, aut nullæ in dividendo ſuperſint figuræ; quod videre eſt in ſequenti exemplo.

Exem-

Exemplum III.

Diviſor 8 in prima figura 8 numeri dividendi 801600 ſemel continetur, proindeque prima quotientis nota erit 1, quæ multiplicetur in diviſorem 8, & productum 8 ſcribatur ſub nota 8 numeri dividendi, a qua ſubtrahatur, reſiduum erit 0; huic dextrorſum deſcendatur ſecunda dividendi nota, quæ eſt 0, & erit membrum dividendum 00, in quo diviſor 8 non continetur, ideoque ponatur 0 in quotiente, & membro 00 dextrorſum addatur tertia dividendi nota 1, fiet membrum dividendum 001, id eſt 1, quod diviſorem 8 non continet; adeoque ponatur alia cifra 0 in quotiente, & membro 001 dextrorſum addatur quarta dividendi figura 6, fiet 0016, ſive 16, in quo diviſor 8 bis continetur; ponatur itaque 2 pro quarta quotientis figura, & productum ex 2 in diviſorem 8, nempe 16, ſubducatur a membro diviſo 16, reſiduum erit 0, cui dextrorſum addatur quinta dividendi figura 0, fiet 00, in quo diviſor 8 non continetur; ergo ponatur 0 in quotiente, & alia dividendi figura, nempe ultima 0 deſcendatur; cumque diviſor 8 in membro dividendo 000 non contineatur, ponatur 0 pro ſexta quotientis figura, & hujus diviſionis quotiens erit 100200.

```
801600 |  8
8      |------
----   | 100200
0016
16
---
000
```

Quarto quando diviſor pluribus conſtat notis, ſecernantur ex dividendo tot notæ ſiniſtrorſum, quot ſunt in diviſore; ſi vero numerum efficiant minorem diviſore, illis una etiam apponatur, atque puncto ab aliis ſecernatur; poſtea perficiatur diviſio, ut in exemplis ſequentibus.

Exemplum IV.

Sit diviſor 24, & dividendus 6816, qui ſcribantur ut dictum fuit numero ſecundo hujus Problematis; poſtea puncto ſecernatur 68 ex dividendo, & quæratur quoties diviſor 24 contineatur in membro dividendo 68, quod ſequenti ratiocinio facillime invenitur. Prima diviſoris nota 2 in primam membri dividendi notam 6 ter continetur; ſed ſecunda diviſoris figura 4 in ſecundam dividendi membri notam 8 non continetur ter; proindeque 68 non continet tres vices diviſorem 24; unde in hoc caſu 2 in 6 continetur tantum bis, & remanent 2, quæ una cum ſequenti nota 8 faciunt 28, in quo altera diviſoris nota 4 etiam bis continetur (nihil autem refert ſi pluries contineatur), adeoque 24 in 68 bis continetur. Ponatur itaque 2 pro prima quotientis nota ſub diviſore infra lineam, & per inventam notam 2 multiplicetur diviſor 24,

```
68.16 | 24
48    |-----
--    | 284
201
192
---
 96
 96
 --
  0
```

& productum 48 ponatur infra membrum diviſum 68 hac ratione: multiplico 2 in 4, & productum 8 pono infra notam 8 numeri 68, deinde multiplico 2 in 2, & productum 4 ſcribo infra notam 6 ejuſdem numeri 68, & inferius ducta lineola, ſubtraho 48 a numero 68, reſiduum eſt 20, huic dextrorſum addo tertiam dividendi notam 1, & fit membrum dividendum 201, quod divido per 24; dico nempe 2 in 20 novies continetur (nullus enim numerus ponitur in quotiente major numero 9), & remanent 2, quæ una cum ſequenti figura 1 faciunt 21; ſed 4 in 21 non continetur novies; ergo in hoc caſu numerus 2 contineri nequit novies in numero 20; dico igitur 2 in 20 continetur octies, & remanent 4 (quia 2 in 8 facit tantum 16), quæ cum ſequenti nota 1 faciunt 41, in quo alia diviſoris nota 4 etiam octies continetur (nihil refert quod pluries contineatur); ergo diviſor 24 in membro dividendo 201 octies continetur; pono igitur 8 pro ſecunda quotientis figura, & multiplico 8 in diviſorem 24, & productum 192 ſcribo infra 201, & ducta lineola, ſubtraho 192 ex 201, & reſiduo 9 infra lineam poſito dextrorſum addo quartam dividendi notam 6, & divido 96 per 24; ideſt dico, 2 in 9 quater continetur, & remanet 1, quæ nota cum ſequenti 6 facit 16, in quo diviſoris nota 4 etiam quater continetur; ideoque diviſor 24 quater continetur in 96; conſequenter pono 4 pro tertia quotientis nota, & multiplicando 4 in 24 fit numerus 96, qui ſubtractus ex membro mox diviſo 96 dat reſiduum 0; ergo quotiens quæſitus eſt 284.

68.16	24
48	284
201	
192	
96	
96	
0	

25. Quando abſoluta diviſione aliquid remanet, tunc reſiduum illud ſcribatur poſt quotientem inventum ſupra lineolam, infra quam ponatur totus diviſor; atque hinc oriuntur fractiones, de quibus inferius diſputandum erit.

Exemplum V.

Numerus dividendus ſit 187695, & diviſor 257, qui ſcribantur ut antea diximus numero ſecundo hujus Problematis. Deinde cum tres primæ dividendi figuræ numerum conſtituant 187, qui minor eſt numero diviſore 257, ideoque quatuor notæ puncto ſecernantur; & habebitur 1876 primum membrum dividendum, in quo diviſor 257 ſepties continetur; nam prima diviſoris nota 2 in 18 novies continetur, & nihil remanet; at ſecunda diviſoris nota 5 non continetur novies in tertia membri dividendi figura 7, ideoque diviſor 257 non continetur novies in numero 1876; proindeque quotientem 9 unitate minuo, & dico 2 in 18 continetur octies, & remanent duo, quæ cum ſequenti nota

1876.95	257
1799	$730\frac{85}{257}$
779	
771	
85	

nota 7 faciunt 27; ſed iterùm nota diviſoris 5 contineri nequit octies in 27; ergo neque totus diviſor 257 octies contineri poteſt in numero 1876: adeoque iterum unitate quotientem minuo, & dico, in hoc caſu numerum 2 contineri tantum ſepties in 18, & remanent 4, quæ cum ſequenti nota 7 faciunt 47, in quo numero ſecunda diviſoris figura 5 etiam ſepties continetur, & remanent 12, quæ una cum ſequenti dividendi nota 6 faciunt 126, in quo numero tertia diviſoris figura 7 etiam ſepties continetur. Scribo igitur 7 in quotiente, & multiplico eandem notam 7 in totum diviſorem 257, atque productum 1799 infra membrum 1876 ordinatim pono, & ſubducta linea ſubtraho 1799 ex 1876, & reſiduo 77 infra lineam poſito, dextrorſus addo ſequentem dividendi notam 9, & fit 779, in quo diviſor 257 ter continetur; nam 2 in 7 ter continetur, & remanet 1, qui una cum ſequenti nota 7 facit numerum 17, in quo nota 5 etiam ter continetur, & remanent 2, quæ cum ſequenti figura 9 faciunt 29, in quo tertia diviſoris nota 7 etiam ter continetur. Scribo igitur 3 pro ſecunda quotientis nota, & eandem multiplico in diviſorem 257, & productum 771 ſubtraho ex membro diviſo 779, reliquum eſt 8, cui dextrorſum addo ſequentem dividendi notam 5, & fit 85, in quo diviſor 257 non continetur; pono ergo 0 in quotiente, & quæſitus quotiens erit 730 una cum reſiduo 85, quod ſcribatur prope quotientem 730 ſupra parvam lineolam, infra quam ponatur diviſor 257: unde integer quotiens erit 730 $\frac{85}{257}$, nempe ſeptingenta triginta integra, & octoginta quinque ducenteſimas quinquageſimas ſeptimas partes unius integri.

1876.95	257
1799	730 $\frac{85}{257}$
779	
771	
85	

Similiter cum diviſor major eſt numero dividendo, quotiens obtinetur ſcribendo diviſorem infra dividendum interjecta lineola: atque hinc etiam oriuntur fractiones. Sic dividendo numerum 3 per numerum 4, quotiens erit $\frac{3}{4}$, nempe tres quadrantes, ſeu tres diviſum quatuor, ideſt tres quartæ partes unius integri. 26.

Cum autem *diviſor pluribus conſtat* figuris, & dividendus valde prolixus *eſt, illis præcipue, qui in tradita diviſionis* praxi peritiores non ſunt, utiliſſima erit ſequens dividendi methodus. 27.

Sit numerus dividendus 104007488, & diviſor 328, qui ſiniſtrorſum ſcribatur, & prope hunc, interjecta lineola a ſummo deorſum ducta, ponatur 1. Poſtea diviſor 328 multiplicetur per omnes numeros ſimplices 2, 3, 4, &c. uſque ad 9, & producta 656, 984, 1312, &c. ordinatim ſcribantur ſub ipſo diviſore, & prope eadem producta infra unitatem ponantur numeri ſimplices reſpondentes, per quos nempe multiplicatus fuit diviſor: atque hoc pacto numerus ſimplex 2 indicat productum appoſitum 656 bis continere diviſorem; numerus 7 ſignificat appoſitum productum 2296 ſepties continere diviſorem 328, & ſic de reliquis. Hoc poſito, quia tres primæ dividendi figuræ 104 non

non continens diviſorem 328, fiat punctum infra quartam, quæ eſt 0, & primum membrum dividendum erit 1040. Ut autem inveniatur quoties diviſor 328 contineatur in 1040, obſervetur quale ex productis poſitis infra diviſorem ſit proxime minus, quam 1040, invenietur eſſe 984, cui appoſita eſt nota 3. Ponatur itaque 3 in quotiente ad dexteram dividendi, & ſubtrahatur 984 ex membro diviſo 1040, reſiduum erit 56, cui addatur ſequens dividendi figura, videlicet quinta 0, fiet 560 ſecundum membrum dividendum, quod ſemel tantum continet diviſorem; nam majus eſt diviſore 328, ſed minus numero 656, qui bis continet diviſorem: ideoque ponatur 1 in quotiente, & diviſor 328 ſubtrahatur ex 560, reliquum erit 232, cui addatur ſexta dividendi nota 7, habebitur 2327 tertium membrum dividendum. Iterum obſervetur quale productum infra diviſorem poſitum ſit proxime minus quam 2327, patet eſſe numerum 2296, qui ſepties continet diviſorem; unde ponatur 7 in quotiente, & ſubducatur 2296 ex 2327, invenietur reſiduum 31, cui dextrorſum addatur ſequens dividendi nota 4, fiet numerus 314, qui diviſorem non continet, ideoque ponatur 0 in quotiente, & alia dividendi figura 8 deſcendatur, habebitur membrum dividendum 3148: quæratur infra diviſorem productum proxime minus quam 3148, & invenietur 2952, cui appoſita eſt figura 9; ideoque novies continet diviſorem; ponatur itaque 9 pro quinta quotientis figura, & ſubtrahatur 2952 ex 3148, remanebit 196; huic addatur ultima dividendi figura 8, erit ultimum membrum dividendum 1968, cui æquale eſt productum ſexto loco poſitum infra diviſorem; proindeque ſexies diviſorem continet. Scribatur igitur 6 pro ultima quotientis nota, & ſubtracto 1968 ex 1968, nihil remanet. Ergo hujus diviſionis quotiens eſt 317096.

1	328
2	656
3	984
4	1312
5	1640
6	1968
7	2296
8	2624
9	2952

```
1040.07488 | 328
           |-------
 984       | 317096
 ---
  560
  328
  ---
  2327
  2296
  ----
   3148
   2952
   ----
    1968
    1968
    ----
       0
```

Demonſtratio.

28. Diviſionis quotiens (Definitione 10.) indicare debet quoties diviſor in dividendo contineatur; ſed in quarto hujus Problematis exemplo numerus 284 exponit quoties diviſor 24 continetur in numero dividendo 6816; ſi enim numerus 24 ducentas octoginta quatuor vices ſibi ipſi addatur, ſive, quod idem eſt, multiplicando numerum

24 per

24 per numerum 284, reſtituetur numerus dividendus 6816. Ergo numerus 24 ducentas octoginta quatuor vices continetur in dividendo 6816; proindeque numerus 284 eſt ejuſdem diviſionis quotiens. Idem de aliis exemplis intelligatur.

Corollarium.

Ex dictis evidenter ſequitur diviſionis examen fieri multiplicando inventum quotientem per diviſorem; ſi erratum non ſit, numerus dividendus reſtituitur. Sic in ſupradicto quarto exemplo multiplicando quotientem 284 per diviſorem 24, productum erit numerus dividendus 6816. Atque ita de reliquis.

ELEMENTORUM ARITHMETICES

LIBER SECUNDUS.

De Numeris Fractis.

DEFINITIO PRIMA.

30. NUmerus ille, qui unam, vel plures partes unius, ejuſdemque rei exprimit, *Numerus Fractus*, vel *Fractio* appellatur.

31. Duobus autem numeris ad quamlibet fractionem conſtituendam, ideſt ad unam, vel plures ejuſdem rei partes ſignificandas, utimur, quorum unus infra alterum ponitur interjecta lineola: ut ad exprimendam cujuslibet rei medietatem, tertiam partem, vel quartam, vel quintam, &c, ſcribimus $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, quod ſic enunciatur, dimidium, triens, quadrans, quinta pars, &c, vel una dimidia, una tertia, una quarta pars, &c. Similiter cujuſvis rei duæ ſeptimæ partes, tres quartæ, quatuor ex quinque partibus, &c, ſic exprimuntur $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, &c, & legitur duæ ſeptimæ partes, tres quartæ, quatuor quintæ partes, &c, vel duo diviſum ſeptem, tres diviſum quatuor, quatuor diviſum quinque, &c.

Definitio II.

32. In omni fractione numerus ſupra lineolam poſitus, *Numerator fractionis* appellatur, quia numerat partes, quæ ex aliquo toto diviſo ſumendæ ſunt. Numerus vero infra lineam ſcriptus vocatur *fractionis Denominator*, vel *Nominator*, ſeu *Diviſor*, quia denominat in quales, ſive in quot partes illud totum intelligatur diviſum.

33. Quælibet fractio indicat quotientem, qui oritur dividendo numeratorem per denominatorem ejuſdem fractionis. Sic fractio $\frac{3}{4}$ exprimit quotientem ortum ex diviſione numeri 3 per numerum 4. Sint exempli cauſa tres argenteæ libræ noſtrates in quatuor æquales partes dividendæ; quotiens hujus diviſionis erit $\frac{3}{4}$ unius libræ, ideſt quarta pars trium librarum continet tres quartas partes unius libræ: quia tres libræ conſtituunt ſexaginta ſolidos, quorum quarta pars ſunt quindecim ſolidi, & tres quartæ partes unius libræ ſunt etiam quindecim ſolidi, ut per ſe patet.

34. Similiter dividendo numerum 6 per numerum 2, quotiens 3 exprimi poteſt per fractionem $\frac{6}{2}$; ſex enim medietates tria integra conſtituunt. Idem intelligatur de alia qualibet diviſione.

Fractio, cujus numerator æqualis eſt denominatori, unitatem, ſive unum integrum adæquat. Sic $\frac{4}{4}$, ideſt quatuor partes adæquant unum integrum. Si enim libra in quatuor æquales partes dividatur, & quiſpiam ex iiſdem partibus quatuor accipiat, evidens eſt eum unam integram libram habere. Similiter $\frac{5}{5}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{17}{17}$, &c, ſignificant 1.

Qua-

Quapropter cum numerator major eſt denominatore, fractio plus quam unum integrum ſignificat. Sic $\frac{5}{4}$, ideſt quinque quartæ partes unius libræ, ſignificant viginti quinque ſolidos, ſeu unam integram libram, & inſuper unam quartam libræ partem. 35.

Cum vero numerator minor eſt denominatore, tunc fractio quantitatem integro minorem ſignificat. Sic $\frac{3}{5}$ unius libræ, viginti ſolidos, ſeu unam integram libram non ſignificant, ſed tantum duodecim ſolidos, qui tres quintas libræ partes conſtituunt. 36.

Si numerator, & denominator cujuſvis fractionis multiplicentur, vel dividantur per eundem numerum, fractionis valor non mutatur. Sit fractio quælibet, $\frac{3}{4}$, hujus tam numerator 3, quam denominatur 4, per eundem numerum 2 multiplicentur, producta 6, & 8 novam fractionem $\frac{6}{8}$ conſtituent æqualem fractioni $\frac{3}{4}$; idem enim eſt quartas, exempli cauſſa, unius libræ partes accipere, ac ſex octavas ejuſdem libræ partes obtinere. 37.

Item ſit fractio $\frac{12}{20}$, hujus numerator 12, & denominator 20, dividantur ambo per numerum 4, quotientes 3, & 5 dabunt novam fractionem $\frac{3}{5}$ ejuſdem valoris ac $\frac{12}{20}$. Ut tres quintæ partes unius libræ ſunt 12 ſolidi, & duodecim vigeſimæ partes unius libræ ſunt etiam 12 ſolidi.

Definitio III.

Numerus dicitur alterius numeri *Menſura*, cum aliquoties ſumtus alterum adæquat. Sic 3 dicitur menſura numeri 12, quia 3 quater ſumtus adæquat numerum 12. 38.

Definitio IV.

Communis menſura duorum, vel plurium numerorum eſt numerus ille, qui aliquoties ſumtus illos adæquat; ſive eſt numerus, qui illos exacte, & ſine reſiduo dividit. Sic numerus 3 eſt communis menſura numerorum 12, 15, 24, &c, quia quater ſumptus producit numerum 12, quinquies repetitus dat numerum 15, & octies ſumtus adæquat numerum 24. Eadem ratione numerus 2 eſt communis menſura omnium numerorum parium. 39.

Definitio V.

Numerus primus, ſive *incompoſitus* eſt ille, quem ſola unitas metitur: conſequenter numeri 2, 5, 7, 11, 13, 17, &c, qui nullam aliam menſuram habent præter unitatem, ſunt numeri primi, ſeu incompoſiti. 40.

Definitio VI.

Numerus compoſitus vocatur ille, quem, præter unitatem, aliquis numerus ab ipſo diverſus dimetitur; hujuſmodi ſunt numeri 4, 6, 8, 9, 10, &c. 41.

Definitio VII.

42. Duo, vel plures numeri dicuntur *inter ſe primi*, vel *incompoſiti inter ſe*, cum nullam aliam menſuram communem habent, præter unitatem. Sic duo numeri 6, & 25 ſunt numeri inter ſe primi, quia nullus numerus utrumque dimetitur. Item numeri 5, 6, 12, 17 ſunt etiam inter ſe primi, quia nullus eſt numerus, qui omnes quatuor dimetiatur.

Definitio VIII.

43. *Numeri inter ſe compoſiti* dicuntur illi, quos, præter unitatem, aliquis numerus communi menſura dimetitur. Numeri 9, 12, 15 ſunt compoſiti inter ſe, quia numerus 3 eos omnes dimetitur.

44. Communis autem datorum numerorum menſura poteſt eſſe unus eorumdem numerorum. Numeri 4, 12, 20 ſunt inter ſe compoſiti, cum numerus 4 ſeipſum, & alios 12, 20, dimetiatur.

Definitio IX.

45. Numerus ille, per quem duos, vel plures numeros dividendo, quotientes obtinentur inter ſe primi, ſeu incompoſiti, dicitur *maxima* eorumdem numerorum *communis menſura*. Numerus 4 eſt maxima communis menſura numerorum 20, & 28, quia dividendo numerus 20, & 28 per 4, quotientes 5, & 7 ſunt numeri inter ſe primi (num°. 42.).

Definitio X.

46. Fractio qualibet *minimis terminis expreſſa* dicitur, quando ejus numerator, & denominator ſunt numeri inter ſe primi, ut fractio $\frac{4}{5}$, item fractio $\frac{7}{12}$, &c.

Definitio XI.

47. Fractiones, quæ habent eundem denominatorem, dicuntur *fractiones ejuſdem nominis*; ideoque fractiones $\frac{4}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{5}{7}$, ſunt fractiones ejuſdem nominis.

48. *Fractiones* vero *diverſi nominis* ſunt illæ, quæ habent denominatores diverſos; quales ſunt $\frac{1}{4}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{2}{3}$, &c.

PROBLEMA PRIMUM.

49. *Maximam communem duorum numerorum menſuram invenire.*

Reſolutio.

Dividatur major numerus per minorem, & completa diviſione, ſi nihil remanet, tunc numerus minor erit maxima quæſita menſura.

Ut

Ut numerorum 7, & 21 maxima communis menſura eſt 7, quia dividendo 21 per 7 nihil remanet. Ideoque ſi dividantur 7, & 21 per 7, quotientes 1, & 3 erunt numeri inter ſe primi.

Si autem diviſo majore per minorem aliquid remanet, tunc neglecto quotiente, notetur reſiduum, & numerus minor dividatur per illud reſiduum. Deinde, neglecto ſemper quotiente, dividatur primum reſiduum per ſecundum; poſtea ſecundum reſiduum per tertium, & ſic deinceps, donec tandem diviſor inveniatur, qui præcedens reſiduum exacte dividat ſine ullo reſiduo; diviſor hic ultimus erit maxima communis menſura quæſita.

Sint numeri 203, & 667; ut inveniatur maxima communis ipſorum menſura, dividatur 667 per 203; tum neglecto quotiente 3, per primum reſiduum 58 dividatur 203; deinde neglecto quotiente, *per ſecundum reſiduum 29 dividatur* primum 58, & reſiduum eſt 0; unde concludendum eſt numerum 29 eſſe maximam quæſitam communem menſuram. Si enim dividantur 203, & 667 per 29, quotientes erunt 7, & 23 numeri inter ſe primi (num°. 42.). Ergo (num°. 45.) 29 eſt quæſita maxima communis menſura duorum numerorum 203, 667.

667 | 203
609   3
203 | 58
174   3
58 | 29
58   2
0

Tandem ſi poſt omnem diviſionem ultimum reſiduum ſit 1, *ſignum* erit datos numeros eſſe primos inter ſe. *Ut ſi quæratur* maxima communis menſura numerorum 17, & 58; diviſo 58 per 17, neglecto quotiente, reſiduum eſt 7; per hoc reſiduum dividatur 17, & invenietur reſiduum 3; per reſiduum 3 dividatur 7, & neglecto ſemper quotiente, reſiduum eſt 1: quod ſignificat datos numeros 17, 58, nullam habere communem menſuram præter unitatem; conſequenter eſſe numeros inter ſe primos (num°. 42.). 50.

58 | 17
51   3
17 | 7
14   2
7 | 3
6   2
1

PROBLEMA SECUNDUM.

Fractiones ad minimos terminos reducere. 51.

Reſolutio.

Primo inveniatur maxima communis menſura inter numeratorem, & denominatorem datæ fractionis per antecedens Problema; deinde per inventam menſuram dividantur numerator, & denominator, quotientes conſtituent quæſitam fractionem minimis terminis expreſſam.

Sit fractio $\frac{32}{48}$ ad minores terminos reducenda: inveniatur (n°. 49.) maxima communis menſura numerorum 32, & 48, quæ erit 16; per 16 dividantur numeri 32, & 48, quotientes 2 & 3 dabunt fra-

ctionem $\frac{2}{3}$ minimis terminis expreſſam (num°. 46.), quia numeri 2, 3, ſunt inter ſe primi. Præterea fractio $\frac{2}{3}$ æqualis eſt fractioni $\frac{32}{48}$ (num°. 37.), quia fracti $\frac{32}{48}$ numerator 32, & denominator 48 per eundem numerum 16 diviſi fuerunt; ex qua diviſione orta eſt fractio $\frac{2}{3}$. Quapropter fractio $\frac{32}{48}$ ad minimos terminos reducta exprimitur per $\frac{2}{3}$.

Eadem ratione fractiones $\frac{5}{20}$, $\frac{17}{34}$, $\frac{32}{12}$, $\frac{301}{667}$ reducuntur ad minimos terminos $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{7}{23}$; & ſic de reliquis.

PROBLEMA TERTIUM.

52. *Numeros fractos ad idem nomen reducere.*

Reſolutio.

Si duæ fuerint fractiones ad idem nomen, ſeu ad eundem denominatorem reducendæ, multiplicentur decuſſatim, nempe numerator primæ in denominatorem ſecundæ, & productum erit numerator novæ fractionis æqualis primæ datæ, poſtea numerator ſecundæ ducatur in denominatorem primæ fractionis, & productum erit numerator novæ fractionis æqualis ſecundæ. Tandem multiplicentur inter ſe denominatores datarum fractionum, & productum erit communis denominator reductarum fractionum.

Sint duæ fractiones $\frac{2}{3}$, & $\frac{4}{7}$ ad commune nomen reducendæ. Ducatur 2 in 7, & productum 14 erit numerator primæ fractionis. Poſtea multiplicetur 4 in 3, & productum 12 erit numerator ſecundæ. Tandem multiplicetur 3 in 7, & productum 21 erit communis denominator; adeoque fractiones reductæ, erunt $\frac{14}{21}$, & $\frac{12}{21}$ ejuſdem nominis, & æquales datis. Nam fractionis $\frac{2}{3}$ numerator 2 & denominator 3 multiplicati fuerunt per eundem numerum 7, unde orta eſt nova fractio $\frac{14}{21}$; ergo (num°. 37.) fractio hæc $\frac{14}{21}$ æqualis eſt fractioni $\frac{2}{3}$. Eodem modo demonſtratur fractionem $\frac{12}{21}$ æqualem eſſe fractioni $\frac{4}{7}$.

$$\frac{2}{3} \qquad \frac{4}{7}$$

$$\frac{14}{21} \qquad \frac{12}{21}$$

53. Cum vero plures ſunt datæ fractiones ad idem nomen reducendæ, tunc unuſquiſque numerator multiplicetur per omnes denominatores aliarum fractionum, & productum erit numerator ejuſdem fractionis reductæ. Poſtea fiat productum omnium denominatorum, quod erit denominator communis. Ut, datis fractis $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, &c. fiat productum 70 ex 2 in 5 in 7, quod erit numerator primæ fractionis. Deinde inveniatur productum 84 ex 4 in 3 in 7, & erit numerator ſecundæ fractionis. Inſuper fiat productum 90 ex 6 in 3 in 5, quod erit numerator tertiæ fractionis. Tandem fiat productum 105 ex 3 in 5 in 7, & erit communis denomina-

$$\frac{2}{3} \qquad \frac{4}{5} \qquad \frac{6}{7}$$

$$\frac{70}{105} \qquad \frac{84}{105} \qquad \frac{90}{105}$$

minator. Quapropter novæ fractiones erunt $\frac{70}{105}$, $\frac{84}{105}$, $\frac{90}{105}$ ejuſdem nominis, & æquales datis. Etenim fractionis, exempli cauſſa, $\frac{2}{3}$ numerator 2 & denominator 3 multiplicati fuerunt per eoſdem numeros 5, 7; conſequenter nova fractio $\frac{70}{105}$ æqualis eſt fractioni $\frac{2}{3}$. Idem de reliquis intelligatur.

PROBLEMA QUARTUM.

Datis duabus, aut pluribus fractionibus, quenam ipſarum maxima ſit invenire. 54.

Reſolutio.

Si fractiones habent idem nomen, ea major eſt, quæ majorem numeratorem habet. Sic fractionum $\frac{2}{11}$, $\frac{7}{11}$, $\frac{9}{11}$, major eſt $\frac{9}{11}$, ut per ſe patet.

Si autem fractiones non ſunt ejuſdem nominis, reducantur, per antecedens Problema, ad eundem denominatorem; atque ex majori numeratore major fractio cognoſcetur.

Itaque ut major ex fractionibus $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$ innoteſcat, reducantur ad idem nomen (num. 52, 53.), fient novæ fractiones reductæ $\frac{56}{84}$, $\frac{63}{84}$, $\frac{60}{84}$, quarum maxima eſt fractio $\frac{63}{84}$ æqualis fractioni $\frac{3}{4}$; conſequenter datarum fractionum $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$, maxima eſt $\frac{3}{4}$.

PROBLEMA QUINTUM.

Numerum integrum in fractionem datæ denominationis reducere. 55.

Reſolutio.

Datus numerus integer multiplicetur per datum denominatorem, & producto ſubſcribatur datus denominator. Ut ſi integer 2 reducendus ſit in octavas, ideſt in fractum, cujus denominator ſit 8, multiplicetur 2 in 8, & producto 16 ſubſcribatur datus denominator 8, erit $\frac{16}{8}$ quæſita fractio æqualis integro numero 2; nimirum duo integra conſtituunt ſexdecim octavas partes.

Corollarium.

Quilibet numerus per unitatem multiplicatus non mutatur; ideoque 56. ſi cuilibet numero ſubſcribatur unitas, fiet fractio, vel quaſi fractio eidem numero æqualis. Sic $\frac{8}{1}$ idem valet, ac 8; & ſic de cæteris.

PROBLEMA SEXTUM.

Fractionem ad integra revocare. 57.

Reſolutio.

Cum fractionis numerator major eſt, vel æqualis denominatori, fractio ad integra reducitur dividendo numeratorem per denominatorem.

rem. Sic fractionis $\frac{15}{5}$ dividendo numeratorem 15 per denominatorem 5, inveniuntur integra 3.

Si autem diviſo numeratore per denominatorem aliquid remanet, tunc reſiduum ponatur ſupra lineolam, infra quam ſcribatur denominator. Fractio $\frac{27}{4}$ dat integra $6\frac{3}{4}$, ideſt ſex integra, una cum tribus quartis unius integri partibus: exempli cauſſa viginti ſeptem quartæ partes libræ noſtratis conſtituunt ſex integras libras, & ſolidos quindecim, qui tres quartas partes libræ efficiunt.

PROBLEMA SEPTIMUM.

58. *Fractiones addere.*

Reſolutio.

Cum fractiones addendæ habent eundem denominatorem, tunc ſimul addantur omnes numeratores, eorumque aggregato ſubſcribatur communis denominator. Sic fractionum $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{7}$, ſumma erit $\frac{6}{7}$. Similiter fractionum, $\frac{2}{13}$, $\frac{4}{13}$, $\frac{5}{13}$, ſumma erit $\frac{11}{13}$.

Cum vero fractiones addendæ non habent idem nomen, tunc reducantur prius ad idem nomen (52. 53.), poſtea ſimul addantur, ut ante dictum eſt. Sint fractiones in unam ſummam colligendæ $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, quæ reducantur ad idem nomen (52, 53.), habebimus $\frac{70}{105}$, $\frac{84}{105}$, $\frac{90}{105}$. In unum colligantur numeratores 70, 84, 90, invenietur quæſita ſumma $\frac{244}{105}$, quæ (57.) continet integra 2 cum fractione $\frac{34}{105}$.

59. Si autem integri cum fractis addendi ſint, reductis fractis ad idem nomen, ſeparatim colligantur numeri integri, & ſeparatim fracti, quorum ſumma, ſi aliquod integrum conſtituat, integrorum ſummæ adjiciatur. Ut numerorum $8\frac{2}{3}$, $12\frac{4}{5}$, $9\frac{6}{7}$, ideſt (reductis fractis ad idem nomen), numerorum $8\frac{70}{105}$, $12\frac{84}{105}$, $9\frac{90}{105}$, ſumma erit $29\frac{244}{105}$, ſive $31\frac{34}{105}$, quia fractorum ſumma $\frac{244}{105}$ continet duo integra, una cum fracto $\frac{34}{105}$, ut ex antecedenti numero evidens eſt.

8	$\frac{2}{3}$	8	$\frac{70}{105}$
12	$\frac{4}{5}$	12	$\frac{84}{105}$
9	$\frac{6}{7}$	9	$\frac{90}{105}$
31	$\frac{34}{105}$	29	$\frac{244}{105}$

PROBLEMA OCTAVUM.

60. *Numeros fractos ſubtrahere.*

Reſolutio.

Si numeri fracti eundem habent denominatorem, ſubtrahatur numerator minoris ex numeratore majoris fracti, & reſiduo communis denominator ſubſcribatur. Ut ex fracto $\frac{18}{25}$ ſubtrahendo fractionem $\frac{12}{25}$, reſiduum erit $\frac{6}{25}$. Si autem datæ fractiones non ſunt ejuſdem nominis, reducantur (52, 53.), & reliqua fiant ut antea.

Cum

Cum vero fractio ſubtrahenda eſt ab integro, tum numerus integer reducatur in fractum ejuſdem nominis cum data fractione (55.), poſtea operetur ut antea. Sic ex integro 8 ſubducendo fractum $\frac{2}{3}$, reduco integrum 8 in tertias, & fit $\frac{24}{3}$ (55.), deinde ſubtrahendo $\frac{2}{3}$ ex $\frac{24}{3}$, reſiduum eſt $\frac{22}{3}$, ſive ad integra reducendo, eſt $7\frac{1}{3}$ (57.). 61.

Si integer cum fracto $4\frac{2}{3}$ ſubtrahendus ſit ab integro cum fracto $7\frac{3}{4}$; reducatur 4 in tertias (55.), fiet $\frac{12}{3}$: unde $4\frac{2}{3}$ exprimetur per $\frac{14}{3}$. Similiter numerus 7 reducatur in quartas, fiet $\frac{28}{4}$; ideoque $7\frac{3}{4}$ exprimetur per $\frac{31}{4}$. Poſtea duæ fractiones $\frac{14}{3}$, & $\frac{31}{4}$ reducantur ad idem nomen (52.), habebitur $\frac{93}{12}$, & $\frac{56}{12}$; atque ſubtracto 56 ex 93, reſiduum quæſitum erit $\frac{37}{12}$, ideſt $3\frac{1}{12}$ ad integra reducendo (57.). Itaque ſubtrahendo $4\frac{2}{3}$ ex $7\frac{3}{4}$, reſiduum eſt $3\frac{1}{12}$. 62.

PROBLEMA NONUM.

Numeros fractos multiplicare. 63.

Reſolutio.

Fractorum multiplicatio obtinetur multiplicando numeratores inter ſe, & inter ſe etiam denominatores. Sint fractiones inter ſe multiplicandæ $\frac{5}{7}$, & $\frac{3}{4}$, multiplicentur 5 in 3, & 7 in 4, productum erit $\frac{15}{28}$. Item multiplicando $\frac{3}{11}$ per $\frac{1}{2}$, productum erit $\frac{3}{22}$. Similiter fractionum $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{9}$, productum erit $\frac{40}{189}$.

Si fractus per integrum, aut viciſſim integer per fractum multiplicandus ſit, tunc integro ſubſcribatur unitas (56.), ut fiat quaſi fractio, deinde operetur ut ſupra; ſive, quod idem eſt, multiplicetur integer numerus per numeratorem fractionis, & producto ſubſcribatur denominator datæ fractionis. Sit numerus integer 8 multiplicandus per fractum $\frac{3}{4}$. Integro 8 ſupponatur unitas, fiet $\frac{8}{1}$. Deinde multiplicetur $\frac{8}{1}$ per $\frac{3}{4}$, productum erit $\frac{24}{4}$, ideſt integra 6 (57.). Similiter multiplicando $\frac{3}{11}$ per 7, ideſt per $\frac{7}{1}$, productum habebitur $\frac{21}{11}$. 64.

Si autem integer numerus cum fracto per fractum multiplicandus ſit, reduc integrum in fractum ejuſdem nominis cum fractione ſibi adhærente (55.), cui addatur, & reliqua fiant ut ſupra. Multiplicandus ſit $3\frac{5}{6}$ per $\frac{2}{7}$, reducatur integer 3 in ſextas (55.), fiet fractio $\frac{18}{6}$, quæ addatur cum $\frac{5}{6}$, atque ſumma $\frac{23}{6}$ multiplicetur per $\frac{2}{7}$, habebitur productum $\frac{46}{42}$, quod (57.) unum integrum conſtituit, & $\frac{4}{42}$, ſive $\frac{2}{21}$ (51.). 65.

Eadem ratione multiplicando $8\frac{2}{3}$ per 4, ſive $\frac{26}{3}$ per $\frac{4}{1}$, obtinetur productum $\frac{104}{3}$, ideſt (57.) $34\frac{2}{3}$.

Tandem ſi integer cum fracto per integrum cum fracto multiplicandus ſit, reducatur (55.) uterque integrorum ad fractum ejuſdem denominationis cum fractione ſibi adjuncta. Ut ad multiplicandum $4\frac{2}{3}$ per $6\frac{3}{5}$, reduco integrum 4 in tertias, quas adjungo cum $\frac{2}{3}$, & 6 in quintas, quas addo cum $\frac{3}{5}$; deinde inter ſe multiplico inventas fractiones $\frac{14}{3}$, & $\frac{33}{5}$, productum erit $\frac{462}{15}$, quod ad integra, & ad minimos terminos reductum (57, 51.), dat $30\frac{4}{5}$. 66.

PRO-

PROBLEMA DECIMUM.

67. *Numeros fractos dividere.*

Reſolutio.

Si fractio per aliam fractionem dividenda eſt, decuſſatim, ſeu in crucem duc numeratorem fractionis dividendæ in denominatorem fracti diviſoris, & productum pone pro numeratore quotientis; poſtea multiplica denominatorem fracti dividendi in numeratorem fracti diviſoris, & productum erit denominator quotientis. Sit fractio $\frac{8}{19}$ dividenda per fractionem $\frac{3}{7}$; multiplicetur 8 in 7, & productum 56 ponatur pro numeratore quotientis; deinde ducatur 19 in 3, & productum 57 erit denominator quotientis; ideoque $\frac{56}{57}$ eſt quæſitus quotiens. Item dividendo fractionem $\frac{3}{8}$ per $\frac{3}{5}$, quotiens erit $\frac{15}{24}$; atque ita de reliquis.

68. Cum vero numerator fracti diviſoris exacte dividit numeratorem fractionis dividendæ, & denominator denominatorem, fractus, qui inde oritur, eſt quæſitus quotiens. Sic dividendo $\frac{8}{15}$ per $\frac{2}{3}$, quia numerator 2 diviſoris exacte continetur in numeratorem 8 fracti dividendi, & denominator 3 etiam exacte continetur in denominatore 15; ideoque dividantur 8 per 2, & 15 per 3, & quotientes 4, & 5 conſtituent fractionem $\frac{4}{5}$, quæ erit quæſitus quotiens. Si autem diviſio fiat, ut in antecedenti numero, tunc invenitur quotiens $\frac{24}{30}$, qui ad minimos terminos reductus (51.), dat etiam $\frac{4}{5}$.

69. Quando numerus fractus per integrum, vel integer per fractum dividendus eſt, tunc integro ſubſcribe unitatem, ut fiat quaſi fractio (56.), & operare ut antea. Sic dividendo fractum $\frac{5}{7}$ per integrum 6, ſive per $\frac{6}{1}$; ducto 5 in 1, & 7 in 6, invenitur quotiens $\frac{5}{42}$. Quapropter fractus per integrum dividitur multiplicando denominatorem fractionis per datum integrum numerum. Similiter ſi integer 7, ſive $\frac{7}{1}$ dividendus ſit per $\frac{2}{3}$; multiplicatis 7 in 3, & 1 in 2, quotiens erit $\frac{21}{2}$, ſeu 10 $\frac{1}{2}$ ſi fractio ad integra reducatur (57.); ideoque numerus 7 decies cum dimidio continet fractum $\frac{2}{3}$. Item dividendo 12, ſeu $\frac{12}{1}$ per $\frac{3}{4}$, quotiens erit $\frac{48}{3}$, ideſt 16. (57.). Ergo ut integrum numerum per fractum dividas, multiplica integrum per denominatorem fractionis, & producto ſubſcribe numeratorem datæ fractionis.

70. Si integer cum fracto dividendus ſit per fractum, vel per integrum cum fracto; tunc reducatur integer in fractum ejuſdem nominis cum fractione ſibi adhærente, cum qua in unam ſummam colligatur, & reliqua fiant ut ſupra. Sit 12 $\frac{1}{4}$ dividendus per $\frac{5}{6}$; reducatur 12 in quartas (55.), fiet $\frac{48}{4}$, qui una cum $\frac{1}{4}$ producit $\frac{49}{4}$. Dividatur $\frac{49}{4}$ per $\frac{5}{6}$, erit $\frac{294}{20}$ quæſitus quotiens. Item dividendo 8 $\frac{1}{3}$, ſive $\frac{25}{3}$ per 5, quotus erit $\frac{25}{15}$. Similiter ut dividatur 9 $\frac{3}{5}$ per 7 $\frac{1}{4}$, reducendus eſt 9 in quintas, & 7 in quartas partes (55.), & invenietur $\frac{48}{5}$ fractus dividendus, & $\frac{29}{4}$ fractus diviſor; conſequenter multiplicando 48 per 4, & 5 in 29, erit $\frac{192}{145}$ quotiens quæſitus.

ELE-

ELEMENTORUM ALGEBRÆ

LIBER PRIMUS.

De Calculo integrarum Quantitatum.

IN Arithmetica Specioſa, ſeu Litterali, quæ vulgo Arabica voce *Algebra* dicitur, & a Græcis Analyſis Specioſa appellatur, Alphabeti litteris utimur ad quamlibet quantitatem deſignandam; quilibet enim numerus, ſive integer ſit, ſive fractus, appellari poteſt numerus a, vel numerus b, vel numerus m, &c. Item quodlibet corpus nominari poteſt corpus a, vel corpus *b*, *vel corpus x*, *&c.* Idem de alia qualibet quantitate intelligatur. 1.

Cum vero numerus aliquis, vel linea, vel corpus appellatur a, ejus 2.
duplum exprimetur per 2 a, triplum per 3 a, quadruplum per 4 a, &c. Præterea ejuſdem quantitatis dimidium, tertia pars, vel quarta, hoc modo indicabitur $\frac{1}{2}$ a, $\frac{1}{3}$ a, $\frac{1}{4}$ a, vel $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{3}$, $\frac{a}{4}$. Idem de reliquis quantitatibus intelligatur.

Prioribus Alphabeti litteris a, *b*, c, *d*, &c. utimur ad exprimendas quantitates cognitas, ſeu datas. *Poſtremis vero x, y, z, u* incognitæ, & quæſitæ quantitates indicantur. 3.

Definitio I.

Numeri litteris præfixi dicuntur *Coeficientes* earundem litterarum. 4.
Sic quantitatum 4 a, 3 m, 5 x, numeri 4, 3, 5 coeficientes appellantur.

Litteræ, ſeu quantitates, quæ nullum habent coeficientem, ſem- 5.
per intelligantur præfixam habere unitatem. Ut a idem ſignificat ac 1 a, m idem valet ac 1 m, abx idem eſt ac 1 abx.

Definitio II.

Quantitates dividuntur in *poſitivas*, ſeu *affirmativas*; & *negativas*, 6.
ſeu *privativas*. Ut argentum, quod poſſidemus, dicitur quantitas poſitiva; ſed æs alienum, negativa quantitas appellatur.

Algebriſtæ quantitates poſitivas nihilo majores eſſe dicunt, & negativas nihilo minores; nam o, ſeu nihilum quantitatibus additum, eas nec auget, nec minuit; unde quidquid alicujus quantitatis valorem augere poteſt, dicendum eſt nihilo majus; quod vero quantitatem minuit, nihilo minus. Quoniam vero quantitas affirmativa alteri addita ejus valorem auget, & viciſſim negativa minuit, iccirco quantitas poſitiva erit nihilo major, & negativa nihilo minor.

Cæterum quantitates poſitivæ, vel negativæ dicuntur in ordine ad alias, quas augent, vel minuunt, non autem in ſe ſpectatæ; omnis enim quantitas in ſe ſpectata poſitiva eſt, ſeu nihilo major.

7. Quantitates poſitivæ indicantur hoc ſigno +, quod dicitur *plus*; quantitates vero negativæ hoc ſigno —, ideſt *minus* afficiuntur; hoc vero diſcrimine, ut quantitates illæ, quæ nullum ſignum præfixum habent, ſemper intelligantur habere ſignum +, proindeque poſitivas eſſe; quantitatibus autem negativis ſemper præfigatur ſignum —. Ut 8 idem ſignificat ac + 8, a idem valet ac + a, &c. Cum vero numerus 8 quantitatem negativam ſignificat, perpetuo ſcribatur — 8. Item ſi quantitates 7, 5, a, m fuerint negativæ, hac ratione ſcribendæ erunt — 7, — 5, — a, — m.

8. Ad multiplicandas inter ſe quantitates aliquando utimur hoc ſigno ×, quod multiplicationis ſignum dicitur. Ut ſi quantitas a multiplicanda ſit per quantitatem x, productum exprimi poteſt ſcribendo a×x; quod legitur a multiplicatum x. Similiter 3 × 4 idem ſignificat ac 12, productum nempe ex 3 in 4.

9. Signo =, ideſt æquale, utimur ad comparandas duas æquales quantitates, & appellatur ſignum æqualitatis, ſeu æquationis. Comparatio enim duarum quantitatum æqualium, ſeu ejuſdem valoris, vocatur *æquatio*. Si exempli cauſſa duæ quantitates a & m ſignificent duas æquales quantitates, ad exprimendam hanc æqualitatem inter a, & m, ſcribatur a = m, ideſt a æqualis m. Item 8 + 4 = 12 ſignificat ſummam numerorum 8, & 4 æqualem eſſe numero 12. Similiter x = 7 ſignificat valorem quantitatis x eſſe 7.

Quantitas poſita ante ſignum = dicitur prima pars æquationis, & quantitas, quæ ſcribitur poſt ſignum, ſecunda æquationis pars appellatur.

Definitio III.

10. Quantitates, quæ ſignis +, & — non ſunt connexæ, dicuntur *ſimplices*, *monomiæ*, vel *incomplexæ*, ut a, — b, acx, $\frac{am}{c}$, &c.

11. Contra vero quantitates ſignis +, & — ſimul connexæ, appellantur *compoſitæ*, *polynomiæ*, vel *complexæ*, ut a + c, a — m, a + b — x, &c. Atque quantitates illæ, quæ duobus terminis conſtant, *binomiæ* appellantur, ut a + b, c — m, &c; ſi tribus terminis, *trinomiæ*, ſi quatuor terminis, *quadrinomiæ* vocantur: & ſic deinceps.

12. Primo quantitatum compoſitarum termino nullum præfigitur ſignum, quando eſt quantitas poſitiva, ſed præfixum intelligitur ſignum +. Sic a — b idem ſignificat ac + a — b; 5 + 3 idem eſt ac + 5 + 3.

PRO-

PROBLEMA PRIMUM.

Algebraicas quantitates in unam ſummam colligere.

Reſolutio.

Additio quantitatum Alphabeti litteris expreſſarum obtinetur ſcribendo datas quantitates unam deinceps poſt aliam cum ſuis ſignis $+$, & $-$, quæ præfixa habent, vel habere intelliguntur (7.). Unde ſimplicium quantitatum a, b, c, $-x$ ſumma erit $a + b + c - x$; 13.

Item quantitatum $4a$, cx, $\frac{b}{m}$, $5am$ ſumma erit $4a + cx + \frac{b}{m} + 5am$.

Similiter compoſitarum quantitatum
$a + b + x$, $3c - m$, $ax + 2ac - z$ ſumma erit $a + b + x + 3c - m + ax + 2ac - z$

PROBLEMA SECUNDUM.

Compoſitas quantitates ad ſimpliciores expreſſiones reducere.

Reſolutio.

Primo cum in eadem ſumma eadem quantitas bis ſcripta invenitur, ſemel ſigno $+$, & ſemel ſigno $-$ affecta, omnino delebitur eadem quantitas. 14.

Sic $+a - a$, $+5 - 5$, $+7am - 7am$ nihil ſignificant; ſigna enim $+$, & $-$ contraria ſunt, & quod a ſigno $+$ affirmatur, idem a ſigno $-$ negatur. Unde ſumma $4a - 3b + 4c + x - 4c$ reducitur ad ſimpliciorem expreſſionem
$4a - 3b + x$, quia termini
$+4c$, & $-4c$ ſe invicem deſtruunt.

Item quantitas compoſita
$4a - 3b + cx + 3b + 2c - cx$
reducitur ad ſimpliciorem
$4a + 2c$, quia termini
$-3b + 3b$, & $+cx - cx$ ſe ſe mutuo deſtruunt.

Secundo ſi in eadem ſumma inveniantur quantitates eiſdem litteris expreſſæ, & eodem ſigno $+$, vel $-$ affectæ, tunc in unam ſummam colligantur ipſarum coeficientes, & ſummæ præponatur idem ſignum, & poſt coeficientium ſummam eadem quantitas ſemel ſcribatur. 15.

Sic pro ſumma
$5a + 4a$ ſcribatur $9a$.

Item quantitas
$2a + b + 3a + 4b + 7a$ ad ſimpliciores terminos reducta exprimitur per

12 a + 5 b.

Similiter quantitas

4 a — 3 b + a — 4 b reducitur ad ſimpliciorem expreſſionem

5 a — 7 b; atque ita de reliquis.

16. Tertio, cum autem quantitates iiſdem litteris expreſſæ ſigna habent diverſa, & inæquales coeficientes, tunc minor coeficiens a majori ſubducatur, & reſiduo præponatur ſignum majoris.

Quapropter ſumma

12 a b + 4 b — 5 a b — 9 b, ſubducto coeficiente 5 ex 12, & 4 ex 9, atque poſito ſigno + ante primum reſiduum 7, & ſigno — ante reſiduum 5, eadem ſumma brevius exprimetur per

7 a b — 5 b.

Eadem ratione quantitas

4 a + 3 c — 4 b — a + 8 b reducitur ad

3 a + 3 c + 4 b; & ſic de cæteris.

PROBLEMA TERTIUM.

Algebraicas quantitates ſubtrahere.

Reſolutio.

17. Scribatur in primis quantitas major (ea nempe, a qua altera ſubtrahenda eſt) cum omnibus ſuis ſignis +, & —, poſtea ei adjungatur quantitas ſubtrahenda, ſed mutatis omnibus ejus ſignis, ideſt + in —, & — in +, atque habebitur quæſitum reſiduum. Ut ſubtrahendo c ex a, ideſt + c ex + a, reſiduum erit + a — c, ideſt a — c.

Item ſubtrahendo — m ex a,

reſiduum erit a + m.

Similiter ex quantitate

3 a + 2 b — c ſubtrahendo quantitatem

m — 3 x + z, differentia, ſeu reſiduum erit

3 a + 2 b — c — m + 3 x — z.

Demonſtratio.

18. In omni ſubtractione differentia, ſeu reſiduum, eſt id, quod deficit quantitati ſubducendæ, ut adæquet quantitatem minuendam; adeoque ſumma reſidui cum quantitate ſubducta reſtituere debet minuendam quantitatem; atqui ſubtractionem perficiendo eo modo, quo dictum eſt in numero antecedenti, ſi in unum colligantur reſiduum, & quantitas ſubtracta, ſemper reſtituetur quantitas minuenda: ergo ſubtractio quantitatum fieri debet addendo quantitati minuendæ quantitatem ſubtrahendam, variatis omnibus ejus ſignis.

Sic in antecedenti ultima ſubtractione, ſi reſiduum inventum

3 a

$3a + 2b - c - m + 3x - z$ addatur quantitati ſubtractæ
$m - 3x + z$,
fiet ſumma
$3a + 2b - c - m + 3x - z + m - 3x + z$, quæ ad ſimpliciores terminos reducta (14.), reſtituit quantitatem minuendam
$3a + 2b - c$;
& ſic de cæteris.

PROBLEMA QUARTUM.

Algebraicas quantitates multiplicare.

Reſolutio I.

Primo cum quantitates omnes (6.) ſint vel poſitivæ, vel negativæ, *producta, quæ ex ipſarum quantitatum* multiplicatione oriuntur, etiam poſitiva, vel negativa erunt; conſequenter multiplicanda in primis ſunt ſigna datis quantitatibus præfixa, ut inveniatur ſignum producto quæſito præponendum: quod ſequentibus regulis facillime obtinetur. 19.

Regula I.

Eadem ſigna inter ſe multiplicata ſemper dant + in producto; nimirum *cum* multiplicatur + in +, vel — in —, ſemper in producto ponatur +. Nam multiplicare + in + eſt ponere poſitivum, ergo eſt affirmare. Multiplicare — in — eſt negare quantitatem negativam; ergo idem eſt ac eamdem ponere, ſeu affirmare: duæ enim negationes affirmant. 20.

Regula II.

Signa contraria inter ſe multiplicata dant productum negativum; hoc eſt cum multiplicatur + in —, vel — in +, productum ſemper erit —. 21.

Etenim multiplicare + in — eſt ponere negativum; ſed negativum ponere, ſeu affirmare, idem eſt ac negare poſitivum; ergo multiplicando quantitatem poſitivam in quantitatem negativam, productum erit negativum.

Multiplicare — in + eſt negare poſitivum; ergo idem eſt ac negativum ponere; conſequenter quantitas negativa in poſitivam multiplicata dat productum negativum.

Secundo facta ſignorum multiplicatione juxta præcedentes regulas, ſi litterales quantitates præfixos habent numeros coeficientes (4.), tunc multiplicentur inter ſe iidem numeri coeficientes, ut in vulgari Arithmetica. 22.

Tertio tandem quantitatum litteralium multiplicatio fit per ſimplicem 23.

cem

12a + 5b.

Similiter quantitas

4a — 3b + a — 4b reducitur ad ſimpliciorem expreſſionem

5a — 7b; atque ita de reliquis.

16. Tertio, cum autem quantitates iiſdem litteris expreſſæ ſigna habent diverſa, & inæquales coeficientes, tunc minor coeficiens a majori ſubducatur, & reſiduo præponatur ſignum majoris.

Quapropter ſumma

12ab + 4b — 5ab — 9b, ſubducto coeficiente 5 ex 12, & 4 ex 9, atque poſito ſigno + ante primum reſiduum 7, & ſigno — ante reſiduum 5, eadem ſumma brevius exprimetur per

7ab — 5b.

Eadem ratione quantitas

4a + 3c — 4b — a + 8b reducitur ad

3a + 3c + 4b; & ſic de cæteris.

PROBLEMA TERTIUM.

Algebraicas quantitates ſubtrahere.

Reſolutio.

17. Scribatur in primis quantitas major (ea nempe, a qua altera ſubtrahenda eſt) cum omnibus ſuis ſignis +, & —, poſtea ei adjungatur quantitas ſubtrahenda, ſed mutatis omnibus ejus ſignis, ideſt + in —, & — in +, atque habebitur quæſitum reſiduum. Ut ſubtrahendo c ex a, ideſt + c ex + a, reſiduum erit + a — c ideſt a — c.

Item ſubtrahendo — m ex a,

reſiduum erit a + m.

Similiter ex quantitate

3a + 2b — c ſubtrahendo quantitatem

m — 3x + z, differentia, ſeu reſiduum erit

3a + 2b — c — m + 3x — z.

Demonſtratio.

18. In omni ſubtractione differentia, ſeu reſiduum, eſt id, quod deficit quantitati ſubducendæ, ut adæquet quantitatem minuendam; adeoque ſumma reſidui cum quantitate ſubducta reſtituere debet minuendam quantitatem; atqui ſubtractionem perficiendo eo modo, quo dictum eſt in numero antecedenti, ſi in unum colligantur reſiduum, & quantitas ſubtracta, ſemper reſtituetur quantitas minuenda: ergo ſubtractio quantitatum fieri debet addendo quantitati minuendæ quantitatem ſubtrahendam, variatis omnibus ejus ſignis.

Sic in antecedenti ultima ſubtractione, ſi reſiduum inventum

$3a + 2b - c - m + 3x - z$ addatur quantitati ſubtractæ
$m - 3x + z$,
fiet ſumma
$3a + 2b - c - m + 3x - z + m - 3x + z$, quæ ad ſimpliciores terminos reducta (14.), reſtituit quantitatem minuendam
$3a + 2b - c$;
& ſic de cæteris.

PROBLEMA QUARTUM.

Algebraicas quantitates multiplicare.

Reſolutio I.

19. *Primo cum quantitates omnes (6.) ſint vel poſitivæ, vel negativæ, producta, quæ ex ipſarum quantitatum multiplicatione oriuntur, etiam poſitiva, vel negativa erunt;* conſequenter multiplicanda in primis ſunt ſigna datis quantitatibus præfixa, ut inveniatur ſignum producto quæſito præponendum: quod ſequentibus regulis facillime obtinetur.

Regula I.

20. Eadem ſigna inter ſe multiplicata ſemper dant + in producto; nimirum cum multiplicatur + in +, vel — in —, ſemper in producto ponatur +. Nam multiplicare + in + eſt ponere poſitivum, ergo eſt affirmare. Multiplicare — in — eſt negare quantitatem negativam; ergo idem eſt ac eandem ponere, ſeu affirmare: duæ enim negationes affirmant.

Regula II.

21. Signa contraria inter ſe multiplicata dant productum negativum; hoc eſt cum multiplicatur + in —, vel — in +, productum ſemper erit —.

Etenim multiplicare + in — eſt ponere negativum; ſed negativum ponere, ſeu affirmare, idem eſt ac negare poſitivum; ergo multiplicando quantitatem poſitivam in quantitatem negativam, productum erit negativum.

Multiplicare — in + eſt negare poſitivum; ergo idem eſt ac negativum ponere; conſequenter quantitas negativa in poſitivam multiplicata dat productum negativum.

22. Secundo facta ſignorum multiplicatione juxta præcedentes regulas, ſi litterales quantitates præfixos habent numeros coeficientes (4.), tunc multiplicentur inter ſe iidem numeri coeficientes, ut in vulgari Arithmetica.

23. Tertio tandem quantitatum litteralium multiplicatio fit per ſimplicem

cem litterarum conjunctionem, nullo interpoſito ſigno, vel multiplicationis tantum ſigno × interpoſito.

24. Quapropter multiplicando a per m, ſeu (5, 7.) + 1a per + 1m, productum erit + 1am, ſive am, quod etiam hac ratione indicatur a × m.

Item multiplicando am per c, productum erit amc, vel acm; nihil enim refert, quo ordine ſcribantur litteræ.

Similiter abcmx, vel a × b × c × m × x, vel abc × mx, &c; ſignificat productum ex a in b, in c, in m, in x.

Eadem ratione multiplicando — 3a per 5b, ideſt per + 5b, productum erit — 15ab; nam — in + dat — (21.), 3 in 5 producit 15 (22.), & a in b dat ab (23.).

Eodem modo — 4c in — 3m producit + 12cm.

Item multiplicando cm, ſeu +, 1cm per — 7mx, productum erit — 7cmmx.

25. Ponamus quantitatem a ſignificare numerum 6; & quantitatem b exprimere numerum 4, & quantitatem c numerum 2; ponamus nempe a = 6, b = 4, c = 2; tunc productum ab ſignificabit 6 × 4, ideſt 24, & productum abc, ſeu ab × c indicabit numerum 6 × 4 × 2, ſive 24 × 2, ideſt 48; quantitas vero 5abc ſignificabit numerum 5 × 48, ſcilicet 240.

Reſolutio II.

26. Si quantitas complexa (12.) multiplicanda ſit per quantitatem ſimplicem (11.); tunc ſcribatur ſimplex quantitas ſub primo compoſitæ quantitatis termino, & ducta inferius linea, multiplicetur ſimplex quantitas in ſingulos terminos quantitatis compoſitæ, a ſiniſtra incipiendo, & verſus dexteram progrediendo; producta vero peculiaria infra lineam ponantur cum ſuis ſignis +, & —, diligenter obſervando regulas omnes in præcedentibus numeris 20, 21, 22, 23, &c. traditas.

Sit quantitas a + 2b — c multiplicanda per m. Poſita m ſub primo termino a, & ſubducta lineola, multiplico m in a, & productum am infra lineam pono; poſtea multiplico m in + 2b, & productum + 2bm primo producto am adjungo; tandem multiplico m in — c, & productum — cm ſcribo tertio loco infra lineam; adeoque productum ex a + 2b — c in m erit am + 2bm — cm.

Similiter multiplicando 3a — 4c + m per 3c, oritur productum 9ac — 12cc + 3cm.

Reſolutio III.

27. Cum autem complexa quantitas per aliam compoſitam quantitatem multiplicanda eſt, tum alia infra aliam ſcribantur datæ quantitates, & in-

& inferius ducta linea, ſinguli termini inferioris quantitatis multiplicentur in ſingulos terminos alterius quantitatis, & ſingula peculiaria producta ponantur infra lineam aliud deinceps poſt aliud cum ſuis ſignis $+$, & $-$, & habebitur productum quæſitum.

Multiplicanda ſit quantitas $a + b$ per $c + x$; poſita quantitate $c + x$ infra quantitatem $a + b$, & ſubducta linea, multiplico imprimis $a + b$ per c, & pono productum (26.) $ac + bc$ infra lineam. Poſtea multiplico eandem quantitatem $a + b$ per x, & addo productum $+ ax + bx$ producto jam invento $ac + bc$; ergo productum, quod oritur multiplicando $a + b$ per $c + x$ erit $ac + bc + ax + bx$.

Eadem ratione multiplicando
$3a + 2b - cx$ per
$4a - c$, invenietur productum
$12aa + 8ab - 4acx - 3ac - 2bc + ccx$.

Item multiplicando
$am - 3c + 4$ per
$b - 4a + 2$, obtinetur productum
$abm - 3bc + 4b - 4aam + 12ac - 16a + 2am - bc + 8$.

Scholion I.

Compoſitarum quantitatum multiplicatio aliquando etiam obtinetur per ſignum multiplicationis, ducta ſupra multiplicatores compoſitos linea. 28.
Sic $\overline{a + c - x} \times \overline{b - m}$
indicat productum ex quantitate
$a + c - x$ in quantitatem $b - m$.
Item $\overline{4a + b - am} \times c$
ſignificat productum
$4ac + bc - acm$,
quod oritur multiplicando
$4a + b - am$ per c.

Scholium II.

Præterea cum moleſtum ſit eandem litteram pluries iterare, proindeque, ſicuti in Additione (15.) ſumma $a + a$ brevius exprimitur per $2a$, & ſumma $b + b + b$ per $3b$, &c; ita in quantitatum multiplicatione productum aa deſignatur per a^2, productum aaa per a^3. Similiter b^4 ſignificat productum ex b in b in b in b, atque ita de reliquis. 29.

Hi numeri ad dexteram, & paullo ſupra litteras poſiti dicuntur *Indices*, ſive *Exponentes* earundem quantitatum, quia indicant producta ex iiſdem quantitatibus per ſemetipſas ſemel, vel bis, vel pluries multiplicatis. 30.

Quantitates, quæ nullum habent exponentem, ſemper intelligantur 31.

tur habere unitatem. Sic a ſignificat a^1, m idem valet ac m^1, &c.

32. Quando quantitates inter ſe multiplicandæ iiſdem litteris exprimuntur, tunc ſimul addantur exponentes, & habebitur earundem quantitatum productum. Sit quantitas a^3 multiplicanda per a^2, productum erit a^5.

Demonſtratio.

Nam a^3 ſignificat productum a a a (13.), & a^2 ſignificat a a; ſed quantitas a a a multiplicata per a a dat productum a a a a a, quod (29.) brevius exprimitur per a^5; Ergo multiplicando a^3 per a^2, productum erit a^5: conſequenter ſumma exponentium indicat productum quantitatum, quæ iiſdem litteris exprimuntur.

Itaque multiplicando b^4 per b^3, productum erit b^7; & multiplicando a, ſeu a^1 (31.) per a^7, productum erit a^8.

Item multiplicando $a^3 b^5$ per $a^4 b^3$, productum erit $a^7 b^8$.

Similiter quantitas $4 a b^8 x$ multiplicata per $3 a^4 b^3 m$, dat productum $12 a^5 b^{11} m x$.

Quapropter cum quantitates inter ſe multiplicandæ jam ſint producta plurium quantitatum, tunc tantummodo inter ſe addantur exponentes quantitatum iiſdem litteris expreſſarum.

Sic multiplicando $a^4 c^2$ & $a^2 b x^3$ per $a c^4$, productum erit $a^7 b c^6 x^3$; atque ita de reliquis.

33. Hic ſedulo notetur magnum intereſſe diſcrimen inter quantitatem habentem quemlibet numerum coeficientem, & inter eandem quantitem quæ eundem numerum pro exponente habeat. Sic multum inter ſe differunt 2 a, & a^2, 3 a, & a^3, &c: etenim ponamus quantitatem a ſignificare numerum 5, nimirum fiat $a = 5$, tunc erunt 2 a, ſeu $a + a = 10$, $3a = 15$, $4a = 20$ (n°. 2.); ſed a^2, ſive $a \times a$ erit $= 5 \times 5 = 25$; $a^3 = a \times a \times a = 5 \times 5 \times 5 = 125$, & $a^4 = 625$.

Item ſi fuerit $m = 10$, erit $3m = m + m + m = 10 + 10 + 10 = 30$. Sed $m^3 = m \times m \times m$, erit $= 10 \times 10 \times 10 = 1000$; & ſic de cæteris.

PROBLEMA QUINTUM.

Algebraicas quantitates dividere.

Reſolutio I.

34. Primo in quantitatum diviſione, omnino ut in multiplicatione (20, 21.), eadem ſigna ponunt +, & diverſa —; ideſt ſi dividatur + per +, aut — per —, ſemper quotienti præfigatur ſignum +: at dividendo + per —, vel — per +, ſemper quotienti ſignum — præponatur.

35. Secundo coeficientes, ſi adſint, ſeparatim dividantur juxta regulas Arithmeticæ ſuperius traditas.

Ter-

Tertio deleantur ex dividendo litteræ illæ, quæ continentur in diviſore, & habebitur quæſitus quotiens. Ut dividendo ab per a, quotiens erit b, nam quotiens b in diviſorem a multiplicatus, reſtituit dividendam quantitatem ab. 36.

Eadem ratione dividendo $aacx$ per $-ac$, quotiens erit $-ax$, quia $-ac \times -ax$ reſtituit dividendam quantitatem $aacx$.

Item dividendo $15abm$ per $3ab$, quotiens erit $5m$, quia $5m \times 3ab$ reſtituit $15abm$.

Cum autem omnes diviſoris litteræ non continentur in dividendo, tunc quotiens exprimitur per fractionem, cujus numerator ſit dividenda quantitas, & denominator ſit diviſor. Ut dividendo a per b, quotiens erit $\frac{a}{b}$, & dividendo c per $-m$, quotiens erit $\frac{c}{-m}$, vel $-\frac{c}{m}$. 37.

Item dividendo $6am$ per $3bx$, quotiens erit $\frac{6am}{3bx}$, vel $\frac{2am}{bx}$, vel $2\frac{am}{bx}$, quia coeficiens 6 dividi poteſt per coeficientem 3.

Similiter dividendo acx per mx, quotiens erit $\frac{acx}{mx}$.

Si eædem litteræ inveniantur tam in diviſore, quam in dividendo, atque habeant numeros exponentes (30.); tunc ſubtrahatur exponens diviſoris ab exponente dividendi, & reſiduum erit exponens quotientis. Sic dividendo m^5 per m^3, quotiens erit m^2. 38.

Demonſtratio.

Nam ſi per extenſum ſcribantur, m^5 æquivalet quantitati $mmmmm$, & m^3 adæquat mmm, & dividendo $mmmmm$ per mmm, quotiens (36.) erit $mm = m^2$; ergo etiam $\frac{m^5}{m^3}$ adæquat m^2; unde patet exponentes diviſoris ſubtrahendos eſſe ab exponentibus quantitatis dividendæ, ut habeatur quæſitus quotiens.

Similiter dividendo $-a^7$ per $-a^3$, quotiens erit $+a^4$, ſeu a^4.

Item dividendo $8a^3b^4c$ per $4a^3b^2c$, obtinetur quotiens $2b^2$; quia $2b^2 \times 4a^3b^2c$, reſtituit $8a^3b^4c$.

Præterea quælibet quantitas per ſemetipſam diviſa dat pro quotiente unitatem, *ideſt* 1; *nam quælibet quantitas ſeipſam ſemel continet*; adeoque dividendo a per a, quotiens erit 1; nam quotiens 1 multiplicatus per diviſorem a, reſtituit dividendam quantitatem a. 39.

Item dividendo $5b$ per $5b$, vel $4ax$ per $4ax$, vel $7a^3b$ per $7a^3b$, quotiens ſemper erit 1, ut per ſe patet.

Corollarium.

Hinc ſequitur, quantitatem habentem pro exponente cifram 0, æqualem eſſe unitati. Sic a^0 ſignificat 1; nam ſi dividatur, exempli cauſſa, quantitas a^3 per quantitatem a^3, juxta regulam traditam n. 38, ſubtrahendus eſt exponens 3 diviſoris a^3 ab exponente 3 dividendi a^3, atque reſiduum erit 0; quod ponendum eſt pro expo- 40.

nente quotientis; adeoque (38.) dividendo a^3 per a^3, quotiens erit a^0: at quælibet quantitas per ſemetipſam diviſa dat pro quotiente unitatem (39.); unde dividendo a^2 per a^2, quotiens eſt 1; ergo quantitas a^0 eſt æqualis 1.

Eadem ratione quantitates b^0, c^0, m^0 ſignificant 1. Item a^0x^0 ſignificat 1; quia a^0x^0 idem valet ac $a^0 \times x^0$, ſive 1×1, ideſt 1.

Quapropter dividendo a^3b per a^2b, ideſt a^3b^1 per a^2b^1, quotiens erit ab^0, ſive $a^1 \times b^0$, ideſt $a \times 1$, quod idem ſignificat ac a, ſeu a^1.

Reſolutio II.

41. Si quantitas complexa per ſimplicem quantitatem dividenda ſit, tunc ſcribantur primo datæ quantitates, ut diximus in Arithmetica n. 2. Probl. 6; deinde ſinguli termini complexæ quantitatis dividantur per datum diviſorem, ut videre eſt in ſequentibus exemplis.

Sit quantitas dividenda

$ab + ac - ax$, & diviſor ſit a; poſito diviſore a ad ſiniſtram quantitatis dividendæ, & ducta infra diviſorem linea, primo dividatur terminus ab per a, & quotiens b ſcribatur infra diviſorem, & erit primus quotientis terminus. Poſtea dividatur ſecundus terminus $+ ac$ per a, & quotiens $+ c$ ſcribatur pro ſecundo quotientis termino: tandem dividatur $- ax$ per a, & quotiens $- x$ erit tertius terminus quæſiti quotientis; atque erit $b + c - x$ quotiens, qui oritur dividendo quantitatem $ab + ac - ax$ per a. Nam multiplicando quotientem $b + c - x$ per diviſorem a, reſtituitur diviſa quantitas $ab + ac - ax$.

Eodem modo dividendo

$8ab - 12am + 4a$ per $4a$, invenitur quotiens

$2b - 3m + 1$.

Item dividendo

$6ac - 9abc + 12acx - 3ac$ per $3ac$, quotiens erit

$2 - 3b + 4x - 1$.

Pari ratione ſi dividatur

$3ab - bc - 3b + bm$ per $- b$,

invenietur quotiens $- 3a + c + 3 - m$.

42. Si quantitas dividenda terminos habeat, qui per datum diviſorem dividi nequeant, tunc eorumdem terminorum diviſio fiat per modum fractionis; ut dividendo

$ac - cm + ab - x$ per c,

quotiens erit $a - m + \frac{ab}{c} - \frac{x}{c}$,

vel $a - m + \frac{ab - x}{c}$.

Similiter dividendo

$a + bc - x$ per m,

quotiens exprimetur per fractionem $\frac{a + bc - x}{m}$.

Re-

Reſolutio III.

Cum vero quantitas complexa per aliam compoſitam quantitatem dividenda eſt, tunc ad dexteram quantitatis dividendæ, interpoſita linea, ſcribatur diviſor, & ſub eodem diviſore ducatur alia linea, & operatio eodem modo peragatur, ac in diviſione numerorum. Exempla rem declarabunt. 43.

Sit quantitas dividenda
$ab + am - ax$, & diviſor
$b + m - x$

Primo dividatur terminus ab per terminum b diviſoris, & quotiens a ponatur infra lineam ſub diviſore; poſtea multiplicetur inventus quotiens a in totum diviſorem $b + m - x$, & productum $ab + am - ax$ ſubtrahatur ex quantitate dividenda, ſcribendo $- ab - am + ax$ infra, vel poſt quantitatem dividendam $ab + am - ax$, & deletis terminis æqualibus a ſignis contrariis affectis, reſiduum erit 0; proindeque a eſt quotiens hujus diviſionis. Nam multiplicando diviſorem $b + m - x$ per quotientem a, reſtituitur diviſa quantitas
$ab + am - ax$.

Idem quotiens a obtinetur, ſi dividatur terminus am per ſecundum terminum m diviſoris, vel dividatur terminus $- ax$ per $- x$.

Quapropter, quando diviſoris termini æque continentur in reſpondentibus terminis quantitatis dividendæ, liberum eſt diviſionem inſtituere per quemlibet diviſoris terminum, qui tamen ſemel aſſumptus, ſemper adhibetur, nec unquam mutari poteſt, ut videre eſt in ſequenti exemplo. 44.

Dividenda ſit quantitas
$aa - bb + 2bc - cc$ per $a + b - c$;
ſcribantur, ut ante dictum fuit, poſtea inſtituatur diviſio per quemlibet terminum diviſoris, exempli gratia, per a, & dividatur terminus aa per a, quotiens (36.) erit a, qui ponatur infra lineam ſub diviſore ductam, & multiplicetur a in totum diviſorem $a + b - c$, & productum $aa + ab - ac$ ſubtrahatur ex quantitate dividenda, *nimirum, mutatis ſignis*, ſcribatur $- aa - ab + ac$ poſt, vel infra quantitatem dividendam
$aa - bb + 2bc - cc$, habebitur reſiduum $aa - bb + 2bc - cc$ $- aa - ab + ac$; & deletis terminis $+ aa$ & $- aa$, qui nihilo æquantur, remanebit dividenda quantitas $- bb + 2bc - cc$ $- ab + ac$;
hujus quantitatis dividatur terminus $- ab$ per jam aſſumptum diviſoris terminum a, & quotiens (34, 36.) erit $- b$, qui ſcribatur poſt primum quotientis terminum jam inventum a, & multiplicetur $- b$ in diviſorem $a + b - c$, productumque $- ab - bb + bc$ ſubtrahatur ex quantitate dividenda, infra eandem ſcribendo $+ ab + bb$ $- bc$, habebitur reſiduum

$- bb + 2bc - cc - ab + ac + ab + bb - bc$, quod ad ſimpliciores terminos reducatur (14, 16.), & remanebit quantitas dividenda $bc - cc + ac$, cujus terminus $+ ac$ dividatur per aſſumptum diviſoris terminum a; quotiens erit $+ c$, qui ponatur pro tertio quotientis termino; atque idem c multiplicetur per diviſorem $a + b - c$, & productum $ac + bc - cc$ ſubtrahatur ex dividenda quantitate $bc - cc + ac$, reſiduum erit

$bc - cc + ac - ac - bc + cc$ æquale nihilo, quia bc & $- bc$, $- cc$ & $+ cc$, $+ ac$ & $- ac$ ſe ſe invicem deſtruunt; unde quotiens erit $a - b + c$.

Si enim multiplicetur $a - b + c$ per diviſorem $a + b - c$, productum

$aa - ab + ac + ab - bb + bc - ac + bc - cc$ ad ſimpliciores terminos reductum (14, 15.), reſtituet dividendam quantitatem $aa - bb + 2bc - cc$.

45. Quando autem diviſor terminos habet, qui æque non continentur in reſpondentibus terminis quantitatis dividendæ, tum diviſio ſemper inſtituatur per diviſoris terminum, qui pluries, vel ſaltem integras vices continetur in dividendæ quantitatis terminis. Exempli cauſſa

Si quantitas $a^3 - b^3$ dividenda ſit per $a^2 + ab + b^2$, tunc diviſio inſtitui poteſt per a^2, vel per b^2, qui æque continentur in reſpondentibus terminis a^3, & $- b^3$; at nequaquam inſtituatur per ab; nunquam enim inveniretur quotiens quæſitus $a - b$.

46. Quod ſi facta diviſione, aliquid remaneat in quantitate dividenda, quod dividi nequeat per aſſumptum diviſoris terminum; tum illud reſiduum ponatur poſt inventum quotientem cum propriis ſignis $+$, & $-$, illi ſupponendo totum diviſorem.

Sit dividenda quantitas

$aa + bb$, & diviſor ſit

$a - b$. Dividatur aa per a, & quotiens a multiplicetur in diviſorem $a - b$, & productum $aa - ab$ ſubtrahatur ex quantitate dividenda, reſiduum erit

$aa + bb - aa + ab$, ideſt

$bb + ab$ (14.). Atque hujus reſidui dividatur terminus $+ ab$ per aſſumptum diviſorem a, erit quotiens b, qui ducatur in diviſorem $a - b$, & productum $ab - bb$ ſubducatur ex quantitate dividenda $bb + ab$, reſiduum erit

$bb + ab - ab + bb$, ideſt $2bb$ (14, 15.), quod dividi nequit per aſſumptum diviſoris terminum a, ideoque in quotiente poſt $a + b$ ſcribatur $\frac{+2bb}{a - b}$, erit igitur hujus diviſionis quotiens $a + b + \frac{2bb}{a - b}$.

47. Cujuſvis diviſionis quotiens aliquando per fractum indicatur, cujus numerator ſit dividenda quantitas, & denominator ſit diviſor; ſic $\frac{ac + bc - cm}{a + b - m}$ indicat quotientem a, qui oritur divi-

den-

dendo $ac + bc - cm$ per $a + b - m$. Et ita de reliquis.

Similiter cum nullus dividendæ quantitatis terminus dividi poteſt 48.
in integris per nullum diviſoris terminum, tunc etiam quotiens exprimitur per fractum, cujus numerator ſit dividenda quantitas, & denominator ſit diviſor; ut dividendo $ab + aa$ per $m - x$, quotiens erit $\frac{ab+aa}{m-x}$.

Præterea quantitatum compoſitarum diviſio aliquando etiam expri- 49.
mitur includendo dividendum, & diviſorem parentheſi, & inter illos apponendo duo puncta; ut

$(a + b) : (c - x)$ indicat quotientem $\frac{a+b}{c-x}$.

Item $(ab - x) : m$, idem ſignificat ac $\frac{ab-x}{m}$.

Si autem inter duas quantitates parentheſi incluſas non apponantur 50.
duo puncta, tunc indicabitur earundem quantitatum productum.

Sic $(a + c)(b - m)$ exprimit productum $ab + bc - am - cm$, quod oritur multiplicando $a + c$ per $b - m$.

Similiter $(a - c + x)m$, deſignat productum $am - cm + mx$ ex $a - c + x$ in m.

ELE-

ELEMENTORUM ALGEBRÆ LIBER SECUNDUS.

De Calculo Fractorum.

DEFINITIO.

51. IN omni quantitatum diviſione quotiens ille, qui exprimitur ponendo quantitatem dividendam ſupra lineolam, & diviſorem infra eandem lineam, ut antea diximus, appellatur *Fractio*.

Sic dividendo a per x, quotiens eſt $\frac{a}{x}$, qui fractio dicitur; & quantitas a ſupra lineam poſita vocatur *Numerator fractionis*; quantitas vero x infra lineam ſcripta, *Denominator fractionis* dicitur.

Axioma I.

52. Quæ eidem ſunt æqualia, & inter ſe æqualia ſunt.
Sit $12 - 4 = 8$, & $15 - 7 = 8$, erit etiam $12 - 4 = 15 - 7$.
Similiter ſi fuerit $a = m$, & $b = m$, erit pariter $a = b$.
Præterea quod uno æqualium majus, vel minus eſt, etiam reliquo æqualium majus, vel minus erit.
Sic ſi erit $a = c$, & alia quantitas b ſit major quantitatis a, erit etiam b major c.
Et ſi b erit minor quantitatis a, erit quoque b minor quantitatis c.

Axioma II.

53. Si æqualibus æqualia, vel eadem addas, quæ fiunt, ſunt æqualia.
Sit $8 - 3 = 5$, & $4 = 6 - 2$, erit etiam $8 - 3 + 4 = 5 + 6 - 2$.
Similiter ſi habeamus $a = c$, & $m = x$, erit etiam $a + m = c + x$.
Item ſit $a = b$, & addatur utrinque eadem quantitas c, fiet $a + c = b + c$.

Axioma III.

54. Si ab æqualibus æqualia demas, quæ remanent ſunt æqualia.
Ponamus eſſe $a = b$, & $c = m$, erit etiam $a - c = b - m$.
Item ſit $a = x$, ſi utrinque auferatur eadem quantitas m, fiet $a - m = x - m$.

Axioma IV.

55. Si quantitates æquales multiplicentur per eandem, vel per æquales quantitates, producta erunt æqualia.

Sit

Sit (9.) æquatio $5 - 2 = 3$, & utraque æquationis pars multiplicetur per 4; fiet nova æquatio $20 - 8 = 12$.

Similiter data æquatione $a = c$, multiplicando æquales quantitates a & c per eandem quantitatem m, fiet nova æquatio $am = cm$.

Item ſi habeamus $a = x$, & $c = m$, multiplicando æquales quantitates a & x per æquales c & m, producta ac, & mx erunt etiam æqualia inter ſe, erit nempe $ac = mx$.

Axioma V.

Si quantitates æquales dividantur per eandem, vel per æquales quantitates, quotientes erunt pariter æquales inter ſe. 56.

Sit $15 - 9 = 6$, dividendo totam æquationem per 3, remanebit $\frac{15}{3} - \frac{9}{3} = \frac{6}{3}$, ideſt $5 - 3 = 2$.

Similiter dividendo æquationem $ac = cm$ per c, remanebit $\frac{ac}{c} = \frac{cm}{c}$, nimirum $a = m$.

Eadem ratione ſi fuerint $a = b$, & $c = m$, dividendo primam æquationem per ſecundam, fiet nova æquatio $\frac{a}{c} = \frac{b}{m}$; dividuntur enim æquales quantitates a & b per æquales quantitates c & m.

Axioma VI.

Quælibet quantitas appellari poteſt a, b, c, x, vel am, bc, mx, 57.
vel $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{x}$, vel $b + c$, vel $m - a$, &c.

Quapropter quælibet data quantitas a fieri poteſt æqualis producto 58.
bc, vel mx, vel fractioni $\frac{c}{m}$ &c. Sic numerus, exempli cauſſa, 5 eſt æqualis producto 5×1, vel $20 \times \frac{1}{4}$, vel $15 \times \frac{1}{3}$, &c., ſive eſt æqualis fracto $\frac{20}{4}$, vel $\frac{15}{3}$, vel eſt æqualis $3 + 2$, vel $30 - 25$, &c.

Axioma VII.

Æquales quantitates ſubſtitui poſſunt æqualibus quantitatibus, ut ſi 59.
habeatur $m = b + c - x$, & ſit $c - x = a$, ſubſtituendo a in locum quantitatis $c - x$ in æquationem $= b + c - x$, fiet alia æquatio $m = b + a$ æqualis datæ $m = b + c - x$, & ſimplicioribus terminis expreſſa.

PROPOSITIO PRIMA.

Theorema.

60. *Si quælibet fractio multiplicetur per ſuum denominatorem, productum erit numerator ejuſdem fractionis.*

Data ſit quælibet fractio $\frac{a}{m}$, quæ multiplicetur per denominatorem m, dico productum eſſe a.

Demonſtratio.

Quantitas m per aliquam quantitatem, quæ vocetur x, multiplicata, efficiet productum m x æquale quantitati a. Ponamus itaque quantitates a, & m x æquales eſſe, ſeu eandem rem ſignificare (57, 58.), nimirum ponatur $a = m\,x$; deinde æquales quantitates a, & m x dividantur per eandem quantitatem m, quotientes $\frac{a}{m}$, & x (axiom. 5.) erunt æquales inter ſe, erit nempe $\frac{a}{m} = x$. Poſtea quantitates æquales $\frac{a}{m}$, & x multiplicentur per eandem quantitatem m, producta $\frac{a}{m} \times m$, & m x (axiom. 4.) erunt inter ſe æqualia, erit nempe $\frac{a}{m} \times m = m\,x$; ſed ex hypotheſi eſt etiam $a = m\,x$; igitur (per axioma primum) erit $\frac{a}{m} \times m = a$; nimirum multiplicando fractum $\frac{a}{m}$ per denominatorem m, productum erit numerator a.

Sed a & m poſſunt ſignificare quaſcumque quantitates integras, vel fractas, ſimplices, vel compoſitas; ideoque fractio $\frac{a}{m}$ exprimit quamvis datam fractionem. Quapropter generaliter concludendum eſt quamlibet fractionem multiplicatam per ſuum denominatorem producere numeratorem ejuſdem fracti. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO SECUNDA.

Theorema.

61. *Si numerator, & denominator cujuslibet fracti multiplicentur, aut dividantur per eandem quantitatem, fractionis valor non mutabitur.*

Primo ſit quælibet fractio $\frac{a}{c}$, cujus numerator a, & denominator c multiplicentur per quamlibet quantitatem m, orietur nova fractio $\frac{am}{cm}$ omnino æqualis datæ fractioni $\frac{a}{c}$: erit nempe $\frac{a}{c} = \frac{am}{cm}$.

De-

Demonſtratio.

Quoniam x (axiom. 6.) ſignificare poteſt quamlibet quantitatem, ideo ponamus fractionem $\frac{a}{c}$ æqualem eſſe quantitati x, ponatur nempe $\frac{a}{c} = x$, atque hujus æquationis (9.) prima pars multiplicetur per c, productum erit a per antecedentem Propoſitionem. Similiter ſecunda pars x multiplicetur per eandem quantitatem c, productum erit c x. Sed multiplicando æquales quantitates $\frac{a}{c}$, & x per eandem quantitatem c, producta a, & c x ſunt æqualia (axiom. 4.); erit nempe a $=$ c x. Præterea æquatio hæc a $=$ c x tota multiplicetur per m, habebitur a m $=$ c m x (axiom. 4.). Tandem æquales quantitates a m, & c m x dividantur per eandem quantitatem c m, quotientes $\frac{am}{cm}$, & x erunt æquales inter ſe (axiom. 5.); erit nempe $\frac{am}{cm} = x$. Sed ex hypotheſi habemus $\frac{a}{c} = x$; ergo (axiom. 1.) erit $\frac{am}{cm} = \frac{a}{c}$. Quod erat primo demonſtrandum.

Secundo data ſit fractio $\frac{ax}{am}$, cujus numerator a x, & denominator a m dividantur per eandem quantitatem a, habebitur nova fractio $\frac{x}{m}$ æqualis datæ $\frac{ax}{am}$. 62.

Demonſtratio.

Nam ſi fractionis $\frac{x}{m}$ numerator x, & denominator m per eandem quantitatem a multiplicentur, orietur fractio $\frac{ax}{am}$ æqualis fractioni $\frac{x}{m}$ per antecedentem Demonſtrationem. Ergo fractionis $\frac{ax}{am}$ dividendo numeratorem a x, & denominatorem a m per a, oritur fractio $\frac{x}{m}$ æqualis datæ fractioni $\frac{ax}{am}$.

Quapropter per eandem quantitatem multiplicando, vel dividendo tam numeratorem, quam denominatorem cujuſvis datæ fractionis, ejuſdem fractionis quantitas, ſeu valor non mutatur. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO TERTIA.

Problema.

Integram quantitatem in fractionem dati denominatoris reducere. 63.

Reſolutio.

Multiplicetur data quantitas per datum denominatorem, & produ-

ctio ſupponatur ipſemet denominator. Ut ſi quantitas a exprimenda ſit per fractionem, quæ habeat denominatorem m, erit $\frac{am}{m}$ quæſita fractio.

Demonſtratio.

Quantitas a exprimi poteſt per fractionem $\frac{a}{1}$ (unitas enim in quantitate a una vice continetur, ideoque habetur $\frac{a}{1} = a$); atque hujus fractionis $\frac{a}{1}$ multiplicatis numeratore a, & denominatore 1 per m, oritur fractio $\frac{am}{m}$ æqualis $\frac{a}{1}$, ſeu a, per primam partem Propoſitionis antecedentis.

Eadem ratione integra quantitas $a + c - m$ reducitur in fractionem, cujus denominator ſit b, atque fit $\frac{ab + bc - bm}{b}$.

Item quantitas $a - c + x$ reducitur ad unicam fractionem $\frac{am - cm + x}{m}$; & ſic de cæteris.

PROPOSITIO QUARTA.

Problema.

64\. *Fractiones ad eundem denominatorem reducere.*

Primo ſi fractiones reducendæ ſunt tantummodo duæ, ut $\frac{a}{m}$, & $\frac{c}{x}$, tunc numerator a & denominator m fracti $\frac{a}{m}$ multiplicentur per denominatorem x alterius fractionis. Item numerator c, & denominator x fracti $\frac{c}{x}$ multiplicentur per denominatorem m primæ fractionis; atque erunt novæ fractiones $\frac{ax}{mx}$, & $\frac{cm}{mx}$, ejuſdem denominatoris, & æquales datis $\frac{a}{m}$, & $\frac{c}{x}$.

Demonſtratio.

Nam per ſecundam Propoſitionem ſunt $\frac{ax}{mx} = \frac{a}{m}$, & $\frac{cm}{mx} = \frac{c}{x}$.

Secundo ſi plures fuerint fractiones reducendæ, ut $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{m}$, $\frac{a}{x}$, &c, tunc numerator, & denominator cujuſque fractionis multiplicentur per productum, quod ex aliarum fractionum denominatoribus reſultat; nimirum termini a, & c fractionis $\frac{a}{c}$ multiplicentur per m x; termini vero b, & m fracti $\frac{b}{m}$ multiplicentur per c x; tandem termini a, & x fracti $\frac{a}{x}$ multiplicentur per c m; & fient novæ fractiones $\frac{amx}{cmx}$, $\frac{bcx}{cmx}$, $\frac{acm}{cmx}$, ejuſdem nominis c m x, & æquales datis.

De-

Demonſtratio.

Etenim per Propoſitionem ſecundam eſt $\frac{amx}{cmx} = \frac{a}{c}$, $\frac{bcx}{cmx} = \frac{b}{m}$, & $\frac{acm}{cmx} = \frac{a}{x}$. Quod erat faciendum, & demonſtrandum.

PROPOSITIO QUINTA.

Problema.

Algebraicas fractiones addere. 65.

Reſolutio.

Si fractiones datæ habent eundem denominatorem, colligantur in unam ſummam omnes numeratores (13.), ſummæ vero ſubſcribatur datus communis denominator. Sic fractionum $\frac{a}{m}$, $\frac{-b}{m}$, $\frac{c}{m}$, $\frac{x}{m}$, ſumma erit $\frac{a - b + c + x}{m}$.

Cum vero fractiones non habent idem nomen, tunc reducantur ad eundem denominatorem per antecedentem Propoſitionem, & reliqua fiant ut ſupra.

Præterea fractionum ſumma aliquando obtinetur ſine ulla reductione, eas ſcribendo cum ſuis ſignis.

Sic fractionum $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{m}$, & $-\frac{a}{x}$ ſumma erit $\frac{a}{c} + \frac{b}{m} - \frac{a}{x}$, vel erit $\frac{amx + bcx - acm}{cmx}$, ſi reducantur ad eundem denominatorem.

PROPOSITIO SEXTA.

Problema.

Fractiones ſubtrahere. 66.

Reſolutio.

Si fractiones datæ non habent idem nomen, reducantur ad eundem denominatorem (Prop. 4.).

Cum vero fractiones reductæ ſunt, vel habent idem nomen, tunc ſubducatur numerator fractionis ſubtrahendæ a numeratore alterius fractionis, & producto ſupponatur denominator communis.

Itaque ex fractione $\frac{da}{b}$ ſubtrahendo fractionem $\frac{m}{b}$, reſiduum erit $\frac{da - m}{b}$ [illegible]

Item a fractione $\frac{ab - c}{x}$ ſubtrahendo fractionem $\frac{bm - ac}{x}$, reſiduum erit $\frac{ab - c - bm + ac}{x}$.

Præterea ſi fractio ab integra quantitate, vel viciſſim integra quantitas a fractione ſubtrahenda ſit, mutatis ſignis quantitatis ſubtrahendæ, in unam ſummam colligantur, & habebitur quæſitum reſiduum: vel reducatur integra quantitas in fractionem ejuſdem nominis (Propoſ. 3.), poſtea fiat ſubductio, ut antea.

Sic ſubtrahendo fractionem $\frac{c}{m}$ ex quantitate a, reſiduum erit $a - \frac{c}{m}$, vel reducendo (Prop. 3.), erit $\frac{am - c}{m}$.

Item ex quantitate $a - c$ ſubtrahendo fractum $\frac{ab + b}{m}$, reſiduum erit $a - c - \frac{ab}{m} - \frac{b}{m}$, vel reducendo erit $\frac{am - cm - ab - b}{m}$.

Similiter ex fracto $\frac{ax}{m}$ ſubtrahendo quantitatem $b + c$, reſiduum erit $\frac{ax}{m} - b - c$, vel reducendo ad idem nomen, erit $\frac{ax - bm - cm}{m}$.

Subtractio aliquando etiam fit ſine ulla reductione, mutando ſigna ſubtrahendæ quantitati. Sic ſubtrahendo fractionem $\frac{c - m}{x}$ ex fractione $\frac{ab}{m}$ reſiduum erit $\frac{ab}{m} - \frac{c + m}{x}$.

PROPOSITIO SEPTIMA.

Problema.

67. *Fractiones multiplicare.*

Reſolutio.

Data ſit quælibet fractio $\frac{a}{c}$ multiplicanda per fractionem $\frac{b}{m}$: multiplicentur numeratores inter ſe, & inter ſe quoque denominatores, fiet fractio $\frac{ab}{cm}$, quæ erit quæſitum productum.

Demonſtratio.

Ponatur fractio $\frac{a}{c} = x$ (58.), & fractio $\frac{b}{m} = z$: deinde prima æquatio $\frac{a}{c} = x$ multiplicetur per c, fiet nova æquatio $a =$

ex (axiom. 4, & Prop. 1.). Similiter ſecunda æquatio $\frac{b}{m} = z$ multiplicetur per m, habebitur alia æquatio $b = mz$ (axiom. 4, & Prop. 1.). Poſtea æquatio $a = cx$ multiplicetur per æquationem $b = mz$, nimirum a per b, & cx per mz, producta ab, & cmxz, erunt æqualia (axiom. 4.), ideſt erit nova æquatio $ab = cmxz$. Tandem æquatio hæc $ab = cmxz$ dividatur per cm, quotientes $\frac{ab}{cm}$, & xz erunt æquales (axiom. 5.), erit nempe $\frac{ab}{cm} = xz$; ſed ex hypotheſi quantitas x ſignificat fractionem $\frac{a}{c}$, & z ſignificat fractionem $\frac{b}{m}$; conſequenter productum xz exprimit productum ex fracto $\frac{a}{c}$ in fractum $\frac{b}{m}$; & oſtenſum eſt fractum $\frac{ab}{cm}$ æqualem eſſe producto xz; ergo etiam fractio $\frac{ab}{cm}$ adæquat productum ex $\frac{a}{c}$ in $\frac{b}{m}$: hoc autem productum $\frac{ab}{cm}$ etiam invenitur multiplicando numeratores inter ſe, & inter ſe denominatores datarum fractionum; ergo fractionum multiplicatio obtinetur multiplicando inter ſe numeratores, & inter ſe quoque denominatores datarum fractionum. Quod erat faciendum, & demonſtrandum.

Si fractio multiplicanda ſit per integram quantitatem, vel viciſſim 68.
integra quantitas per fractionem, tunc multiplicetur numerator datæ fractionis per integram quantitatem, & producto ſupponatur denominator ejuſdem fractionis: ut multiplicando fractum $\frac{a}{c}$ per integram quantitatem m, productum erit $\frac{am}{c}$.

Demonſtratio.

Quantitas m exprimi poteſt per $\frac{m}{1}$; & multiplicando $\frac{m}{1}$ per $\frac{a}{c}$, productum eſt $\frac{am}{1c}$, ſive $\frac{am}{c}$ per antecedentem Demonſtrationem. Ergo patet propoſitum.

PROPOSITIO OCTAVA.

Problema.

Fractiones dividere. 69.

Reſolutio.

Multiplicentur decuſſatim, ideſt numerator fractionis dividendæ per denominatorem diviſoris, productum erit numerator quotientis; & denominator fractionis dividendæ per numeratorem diviſoris, & productum erit denominator quotientis.

Sic dividendo fractionem $\frac{a}{b}$ per fractum $\frac{c}{m}$, quotiens erit $\frac{am}{bc}$.

De-

Demonſtratio.

Ponatur fractio dividenda $\frac{a}{b} = x$ (58.), & diviſor $\frac{c}{m} = z$. Poſtea prima æquatio $\frac{a}{b} = x$ multiplicetur per b, fiet æquatio $a = bx$ (axiom. 4., & Propoſ. 1.), quæ denuo multiplicetur per m, habebitur $am = bmx$. Similiter ſecunda æquatio $\frac{c}{m} = z$ multiplicetur per m, orietur nova æquatio $c = mz$, quæ iterum multiplicetur per b, & habebitur $bc = bmz$ (axiom. 4.). Tandem dividatur æquatio $am = bmx$ per æquationem $bc = bmz$, nimirum am per bc, & bmx per bmz, quotientes $\frac{am}{bc}$, & $\frac{bmx}{bmz}$, ſeu $\frac{x}{z}$ (62.) erunt æquales inter ſe (axiom. 5.), erit nempe $\frac{am}{bc} = \frac{x}{z}$: ſed $\frac{x}{z}$ eſt quotiens, qui oritur dividendo x per z, & x ſignificat, ex hypotheſi, quantitatem dividendam $\frac{a}{b}$, & z ſignificat diviſorem $\frac{c}{m}$; conſequenter $\frac{x}{z}$ ſignificat quotientem, qui oritur dividendo fractum $\frac{a}{b}$ per fractum $\frac{c}{m}$; atque demonſtravimus eſſe $\frac{am}{bc} = \frac{x}{z}$: ergo (axiom. 1.) $\frac{am}{bc}$ eſt quotiens quæſitus.

Quapropter ut fractio quælibet per aliam fractionem dividatur, decuſſatim, ſeu in crucem, multiplicentur numerator fractionis dividendæ per denominatorem diviſoris, & denominator fractionis dividendæ per numeratorem diviſoris, atque primum productum erit numerator quotientis, ſecundum vero productum erit denominator ejuſdem quotientis. Quod erat faciendum, & demonſtrandum.

70. Fractio vero quælibet per integram quantitatem dividitur multiplicando denominatorem fracti per integram quantitatem.

Sic dividendo $\frac{c}{a}$ per m, quotiens erit $\frac{c}{am}$.

Demonſtratio.

Nam quantitas m idem valet ac $\frac{m}{1}$, & dividendo $\frac{c}{a}$ per $\frac{m}{1}$, quotiens eſt $\frac{1c}{am}$, ſeu $\frac{c}{am}$, per antecedentem Demonſtrationem. Ergo patet propoſitum.

71. Quod ſi integra quantitas dividenda ſit per fractionem, tunc integra quantitas multiplicetur per denominatorem fracti, & producto ſubſcribatur numerator fractionis.

Sic dividendo a per $\frac{m}{c}$, quotiens erit $\frac{ac}{m}$.

Demonſtratio.

Quantitas a exprimi poteſt per $\frac{a}{1}$, & dividendo $\frac{a}{1}$ per $\frac{m}{c}$, habetur quotiens $\frac{ac}{1m}$, ideſt $\frac{ac}{m}$, per præcedentem Propoſitionem.

ELE-

ELEMENTORUM ALGEBRÆ

LIBER TERTIUS.

De Quantitatum poteſtatibus, & de Radicum extractione.

DEFINITIO I.

PRoductum, quod fit multiplicando quamlibet quantitatem per unitatem, aut per ſemetipſam ſemel, vel bis, vel pluries, appellatur *Poteſtas*, *Dignitas*, vel *Potentia* ejuſdem quantitatis. 72.

Definitio II.

Prima poteſtas cujuslibet quantitatis eſt ipſa quantitas ſemel poſita, ſeu per unitatem multiplicata; ut 1 × a, ideſt a, eſt prima poteſtas magnitudinis a. 1 b m, ſeu b m, eſt prima dignitas quantitatis b m, &c. 1 × 7, ideſt 7, eſt prima poteſtas numeri 7; & ſic de reliquis. 73.

Definitio III.

Quadratum, vel *ſecunda Poteſtas* cujuslibet quantitatis eſt productum, quod fit ſemel multiplicando datam quantitatem per ſemetipſam. 74.

Itaque numerus 49 eſt quadratum numeri 7, quia oritur ex multiplicatione numeri 7 in numerum 7. 64 eſt quadratum, vel ſecunda poteſtas numeri 8, quia 8 × 8 producit 64.

Item multiplicando a in a, productum aa, ſeu a^2 dicitur quadratum quantitatis a.

Similiter $9a^2b^4$ eſt quadratum quantitatis $3ab^2$, quia multiplicando $3ab^2$ per $3ab^2$, oritur $9a^2b^4$.

Definitio IV.

Cubus, vel *tertia Poteſtas* cujuſvis quantitatis eſt productum, quod oritur multiplicando datam quantitatem per ſuum quadratum. 75.

Sic multiplicando a per a per a, ſeu aa per a, productum aaa, vel a^3 erit cubus, ſeu tertia poteſtas magnitudinis a.

Similiter 27 eſt cubus numeri 3, quia obtinetur multiplicando 3 in 3 in 3, ſive 9 in 3.

Quod ſi tertia poteſtas, ſeu cubus cujuslibet quantitatis multiplicetur per primam poteſtatem ejuſdem quantitatis, productum erit *quarta Poteſtas*, ſeu *Quadrato-Quadratum* ejuſdem quantitatis.

Sic a^4 eſt quarta poteſtas quantitatis a; quia oritur ex $a^3 \times a$. Si a^4 multiplicetur per a, fiet a^5, nempe *quinta Poteſtas* ejuſdem quantitatis a; atque ita deinceps a^6, a^7, a^8 &c. ſunt *ſexta*, *ſeptima*, *octava Poteſtas* ejuſdem a.

De-

Definitio V.

76. Quantitas illa, cujus poteſtates exhibentur (quæ etiam prima poteſtas appellatur), dicitur *Latus*, ſeu *Radix* earundem poteſtatum.

Sic a dicitur radix quadrata, vel radix ſecunda quantitatis a^2; eſt radix tertia, ſeu cubica quantitatis a^3; & ſic deinceps.

Similiter numerus 3 eſt radix quadrata numeri 9, eſt radix cubica, ſeu tertia numeri 27, eſt radix quarta numeri 81, &c.

Definitio VI.

77. Productum, quod fit multiplicando inter ſe duas inæquales quantitates, etiam dicitur *Rectangulum* earundem quantitatum; & quantitates ipſæ dicuntur *Latera* ejuſdem rectanguli, ſumpta denominatione a lineis, ut videbimus in Geometria Plana.

Sic productum am dicitur rectangulum contentum a quantitatibus a, & m; quantitates vero a, & m vocantur latera ejuſdem rectanguli.

PROBLEMA PRIMUM.

78. *Cujuſvis datæ quantitatis quadratum, cubum, quartam poteſtatem, quintam, & alias omnes poteſtates invenire.*

Reſolutio.

Ut inveniatur quadratum, multiplicetur data quantitas per ſemetipſam, & productum erit quæſitum quadratum, vel ſecunda poteſtas datæ quantitatis, ut patet per antecedentem Definitionem Tertiam.

Itaque quadratum quantitatis b erit $b \times b$, ſive b^2.

Quadratum quantitatis am erit $am \times am$, ideſt $a^2 m^2$. Quadratum quantitatis $5 a^3 b^2 m$ erit $5 a^3 b^2 m \times 5 a^3 b^2 m$, ideſt $25 a^6 b^4 m^2$.

Similiter multiplicando $a + b$ per $a + b$, productum $aa + 2ab + bb$ erit quadratum ejuſdem quantitatis $a + b$.

Eadem ratione quadratum fractionis $\frac{a}{b}$ erit $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$, ideſt $\frac{a^2}{b^2}$; atque ita de reliquis.

79. Si autem quæratur cubus, ſeu tertia poteſtas datæ quantitatis, tunc per antecedentem numerum invento quadrato ejuſdem quantitatis, multiplicetur quadratum illud per eandem quantitatem, & habebitur quæſitus cubus.

Itaque cubus quantitatis b erit $b^2 \times b$, ideſt b^3. Cubus quantitatis am erit $a^2 m^2 \times am$, nimirum $a^3 m^3$. Cubus quantitatis $5 a^3 b^2 m$ erit $25 a^6 b^4 m^2 \times 5 a^3 b^2 m$, nempe $125 a^9 b^6 m^3$.

Similiter ſi $aa + 2ab + bb$ (quadratum quantitatis $a + b$) multiplicetur per $a + b$, productum $a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$ erit cubus quantitatis $a + b$.

Quod

Quod ſi tertia poteſtas iterum multiplicetur per datam quantitatem, in producto habebitur quarta poteſtas. Multiplicando quartam poteſtatem per primam, habebitur quinta poteſtas ejuſdem quantitatis; atque ita deinceps. 80.

Quapropter multiplicando 2 in 2, fit 4, quadratum numeri 2. 2 in 4 producit 8, cubum nempe numeri 2. 2 in 8 producit 16, qui numerus eſt quarta poteſtas numeri 2. 2 in 16 facit 32, atque 32 eſt quinta poteſtas numeri 2. 2 in 32 producit 64; unde 64 eſt ſexta poteſtas numeri 2. Atque ita procedendo, reliquæ poteſtates inveniuntur.

Corollarium.

Hinc ut habeatur quælibet poteſtas cujuslibet ſimplicis quantitatis litteralis, ſatis erit exponentes ejuſdem quantitatis multiplicare per numerum *quæſitæ poteſtatis*. Ad obtinendam exempli gratia ſecundam poteſtatem quantitatis $a b^2 c^3 m^6$, multiplicentur per 2 exponentes 1, 2, 3, 6, & erit $a^2 b^4 c^6 m^{12}$ quæſitum quadratum. Nam juxta regulam præcedentis numeri 78, multiplicando $a b^2 c^3 m^6$ per $a b^2 c^3 m^6$, idem productum, ſeu quadratum $a^2 b^4 c^6 m^{12}$ obtinetur. 81.

Similiter tertia poteſtas quantitatis $a b^4 c^2$ obtinetur triplicando exponentes 1, 4, 2, atque erit $a^3 b^{12} c^6$ cubus ejuſdem quantitatis.

Eadem ratione ad obtinendam quartam poteſtatem multiplicentur exponentes per 4; ad obtinendam quintam poteſtatem multiplicentur per 5, atque ita *deinceps*, cum datæ quantitates ſunt ſimplices, & *poſitivæ*.

Numeri vero coeficientes ſemper multiplicandi ſunt inter ſe, juxta regulas traditas in præcedenti Problemate.

Sic tertia poteſtas quantitatis $4a^2 b^7$ erit $4 \times 4 \times 4\ a^6 b^{21}$, ideſt $64\ a^6 b^{21}$ (79.)

Scholion.

Quantitates compoſitæ etiam ad quamvis poteſtatem elevantur ſcribendo ad earum dexteram exponentem quæſitæ poteſtatis, ducta deſuper linea. Sic $\overline{a + b}^2$ ſignificat quadratum quantitatis $a + b$, nempe $a^2 + 2ab + b^2$. Item $\overline{a + b}^3$ ſignificat quantitatem $a + b$ elevatam eſſe ad cubum, ſeu tertiam poteſtatem. 82.

Definitio VII.

Radicis extractio eſt inventio illius quantitatis, cujus poteſtas data eſt. Sic extrahere radicem quadratam ex numero 64, eſt invenire numerum 8, cujus quadratum eſt numerus 64. Similiter radicem tertiam extrahere ex quantitate a^{12}, eſt invenire quantitatem a^4, cujus tertia poteſtas eſt a^{12}. 83.

PROBLEMA SECUNDUM.

84. *Ex dato numero radicem quadratam extrahere.*

Reſolutio.

Si datus numerus eſt quadratus, & non excedit numerum centenum, ejus radix quadrata habetur in ſequenti Tabella.

Hujus prima columna ſiniſtrorſum radices continet; altera vero dextrorſum poſita, earundem radicum quadrata continet. Ex hac igitur Tabella evidens eſt radicem quadratam numeri 25 eſſe numerum 5, radicem quadratam numeri 81 eſſe 9; & ſic de cæteris.

RADICES.	QUADRATA.
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100

85. Cum vero datus numerus minor centenario quadratus non eſt, tunc ſumatur radix maximi quadrati in dato numero contenti. Sic radix quadrata numeri 28 inveniri nequit, quia nullus numerus in ſe ipſum ductus producere poteſt numerum 28; ſed radix quadrata proxime minor numeri 28 eſt 5, quia ejus quadratum 25 eſt maximum quadratum contentum in dato numero 28.

Similiter radix proxime minor numeri 97 eſt 9, quia ejus quadratum 81 eſt maximum quadratum contentum in dato numero 97.

86. Quod ſi datus numerus major eſt numero centeno, ejus quadrata radix ſequenti methodo inveniatur.

Primo dividatur datus numerus in membra, puncto ſecernendo binas quaſque figuras, incipiendo a dextera, & procedendo verſus ſiniſtram. Si figurarum numerus ſit par, quodlibet membrum duas continebit figuras; cum vero numerus figurarum eſt impar, primum membrum ad ſiniſtram poſitum unam tantum habebit notam.

Præterea quot erunt membra, tot figuras habebit radix. Hiſce præſuppoſitis, operetur ut in ſequenti exemplo.

Datus ſit numerus A, ideſt 294849, hujus radix quadrata invenienda ſit. Diviſo dato numero in membra, ut dictum eſt ante, quæratur in ſuperiori Tabula radix quadrata primi membri 29 ad ſiniſtram poſiti; cum vero numerus 29 non ſit quadratus, quæratur radix proxime minor (85.); quæ eſt 5, quæ dextrorſum ponatur in B, interjecta lineola inter numeros A, & B.

294849 A	543 B
25	10 C
44	108 D
2916	
324	
294849	
0	

Poſtea multiplicetur radix 5 in ſeipſam, & qua-

dra-

dratum 25 ſcribatur ſub ipſo membro 29, a quo ſubtrahatur, reſiduum erit 4, cui dextrorſum addatur prima figura 4 ſecundi membri 48, fiet numerus 44. Deinde radix inventa 5 duplicetur, fiet diviſor 10, qui ſcribatur in C, & dividatur 44 per 10, quotiens erit 4, qui ponatur pro ſecunda radicis figurâ in B ad dexteram figuræ 5, fiet 54.

Multiplicetur numerus inventus 54 per ſemetipſum, inveniatur nempe quadratum numeri 54, quod erit 2916, & ſcribatur infra numerum 44 directe, & ordinatim ſub figuris 2948, quæ ſiniſtrorſum duo priora membra numeri A conſtituunt; & ſubtrahatur quadratum 2916 ex numero 2948, reſiduum erit 32, cui dextrorſum deſcendatur prima figura 4 tertii membri 49, fiet membrum dividendum 324. Poſtea duplicetur tota radix jam inventa 54, & ejus duplum 108 ponatur in D, erit alius diviſor, per quem dividatur numerus 324, quotiens erit 3, qui ſcribatur in B poſt 54, ideſt pro tertia radicis nota. Tandem fiat quadratum totius radicis inventæ 543, quod erit 294849, & ſubtrahatur ex tribus integris membris, ideſt ex integro numero A, reſiduum erit 0; ideoque datus numerus A eſt quadratus, & ejus radix quadrata eſt numerus 543: quia numerus 543 in ſeipſum ductus reſtituit numerum datum A.

Si quadratum jam inventæ radicis excedit numerum, a quo ſubtrahi debet, tunc ultima radicis figura per diviſionem inventa, unitate minuatur, ut videre eſt in ſequenti exemplo. 87.

E 3.24	18 F	
1		
22	2 G	
324		
0		

Quæratur radix quadrata numeri E, ſeu 324, qui dividatur in membra per puncta modo jam explicato. Primum membrum ſiniſtrorſum erit 3, cujus radix quadrata proxime minor eſt 1, quæ ponatur in F, ejuſque quadratum 1 ſubtrahatur ex eodem membro 3, reſiduum erit 2; cui dextrorſum addatur prima figura 2 ſequentis membri, fiet numerus 22, qui dividatur per duplum inventæ radicis 1, ideſt per diviſorem 2 poſitum in G; ſed 2 in 22 novies continetur (quod autem pluries contineatur, nihil refert; nullus enim numerus ponitur in quotiente, ſeu in radice, major quam 9), unde quotiens 9 ſcribendus eſſet in F pro ſecunda radicis figura: deinde quadratum radicis 19, ideſt numerus 361, ſubtrahendus eſſet ex numero 324, quod fieri nequit; proinde quotiens 9 unitate minuatur, ponatur nempe 8 pro ſecunda radicis figura; & multiplicando radicem inventam 18 in ſemetipſam, obtinetur ejus quadratum 324, quo ſubtracto ex numero dato 324, nihil remanet; ergo numerus 18 eſt radix quadrata numeri 324.

Cum vero inventus diviſor non continetur in membro dividendo, tunc apponitur in radice cifra 0, & membro dividendo dextrorſum addantur duæ ſubſequentes notæ numeri dati. 88.

Extrahenda ſit radix quadrata numeri 43264, qui vocetur A. Dividatur in periodos, ut dictum fuit numero 86. Primum membrum ſiniſtrorſum erit 4, cujus radix quadrata 2 ponatur in M, & quadra-

tum hujus radicis 2, ideſt 4, ſubtrahatur ex membro 4 numeri A, reſiduum erit o, cui dextrorſus addatur prima figura 3 ſecundi membri 32, fiet o3, ideſt 3. Duplicetur radix inventa 2, & ejus duplum 4 ponatur in G, & dividatur 3 per 4; cum autem 4 in 3 non contineatur, ſcribatur o in M poſt notam 2, item ponatur o in G poſt notam 4; fiet radix 20 in M, & ejus duplum 40 in G erit diviſor. Deinde ad dexteram numeri o3 deſcendatur ſecunda figura 2 ſecundi membri 32, & prima nota 6 tertii membri 64, fiet membrum dividendum 326. Per diviſorem 40 poſitum in G dividatur numerus 326, quotiens erit 8, qui ponatur in M pro tertia radicis figura. Tandem fiat quadratum radicis 208, quod erit 43264, quo ſubtracto ex numero A, reſiduum erit o: adeoque numerus M, ideſt 208, eſt radix quadrata numeri A, ideſt 43264.

A	M
4.32.64	208
4	G
0326	40
43264	
0	

89. Si poſt ultimam ſubtractionem aliquid remanet, ſignum eſt talem numerum non eſſe revera quadratum, neque habere radicem rationalem, quæ nempe numeris exprimi poſſit. Radix vero in operatione inventa erit radix quadrata proxime minor ejuſdem numeri; ſive radix maximi quadrati in eodem numero contenti.

Quamvis autem vera radix inveniri nequeat, quando datus numerus non eſt quadratus; poteſt tamen ad veram radicem magis magiſque approximari, ita ut differentia a vera radice ſit minima. Quod ſequenti ratione obtinetur.

90. Dato numero non quadrato tot cifrarum paria addantur, quot libuerit, ideſt vel duo o, vel quatuor, vel ſex, &c, & ex dato numero una cum prædictis cifris extrahatur radix quadrata, eo modo, quo factum eſt ante.

Poſtea ex inventa radice tot notæ auferantur dextrorſum, quot cifrarum paria addita fuerunt; reliquæ notæ radicis ſiniſtrorſum poſitæ exhibebunt radicem integram proxime minorem dati numeri. Figuræ dextrorſum ablatæ ponantur ſupra lineolam pro numeratore fractionis, & pro denominatore ſcribatur unitas cum tot cifris, quot paria addita fuerunt, & integer prædictus cum fractione ſupradicta indicabunt radicem proximiorem dati numeri.

Ex-

Extrahenda ſit radix quadrata ex numero 15, cujus radix proxime minor (85.) eſt 3. cum reſiduo 6; ut inveniatur radix proximior, eidem numero 15 addantur quotlibet cifrarum paria, exempli gratia duo, fiet numerus 150000, a quo extrahatur radix quadrata juxta regulas ſuperius traditas, & invenietur 387 radix proxime minor numeri 150000, cum reſiduo 231. Ob duo cifrarum paria addita ſecernantur ex ea radice 387 duæ notæ ad dexteram, nempe 87, & numero 87 ſubſcribatur 1 cum duabus cifris; atque erit $3\frac{87}{100}$ radix proximior, vera quidem minor, ſed propinquior, & exactior, quam radix 3 primo inventa: hæc enim radix $3\frac{87}{100}$ neque una centeſima unitatis parte a vera radice differt.

```
                  387
15.00.00 | 3 87/100
9
60            16
1444
 560          176
149769
   231
```

Si tria, vel quatuor, vel plura cifrarum paria addita fuiſſent, tunc radix magis magiſque veræ radici propinquior eſſet.

PROBLEMA TERTIUM.

Ex dato numero radicem cubicam extrahere. 91

Reſolutio.

RADICES.	CUBI.
1	1
2	8
3	27
4	64
5	125
6	216
7	343
8	512
9	729
10	1000

Quando datus numerus eſt cubus, & non excedit numerum 1000, tunc ejus radix habetur in hac Tabula, in qua evidens eſt radicem tertiam, ſeu cubicam numeri 343 eſſe numerum 7; radicem cubicam numeri 729 eſſe 9. Viciſſim patet cubum numeri 7 eſſe 343; cubum numeri 5 eſſe 125, &c.

Si datus numerus minor numero 1000 non eſt cubus, tum accipiatur radix proxime minor, ideſt radix maximi cubi in dato numero contenti. 92

Sic radix cubica proxime minor numeri 124 eſt 4, quia ejus cubus 64 eſt maximus cubus contentus in dato numero 124.

Cum autem datus numerus excedit numerum 1000, tunc ſequenti methodo extrahitur radix. 93

Invenienda ſit radix tertia numeri 79507, qui vocetur A. Dividatur datus numerus in membra dextrorſum incipiendo, ita ut ſingula membra tres contineant figuras, excepto primo

mo membro ſiniſtrorſum, quod aliquando unam tantum, vel duas habebit notas, ut in hoc exemplo apparet.

Præterea quot erunt membra, totidem erunt notæ in quæſita radice.

Poſtea quæratur in antecedenti Tabula radix tertia primi membri ad ſiniſtram poſiti; ſed in dato numero primum membrum 79 non eſt numerus cubus, adeoque accipiatur radix cubi 64 proxime minoris, quæ eſt 4, & ponatur in R. Hujus radicis 4 fiat cubus 64, qui ſubducatur a primo membro 79, & reſiduum erit 15, cui dextrorſum adjungatur prima ſequentis membri figura 5, fiet 155 membrum dividendum.

A	R
79. 507	43
64	D
155	48
79507	
0	

Deinde inveniatur quadratum 16 inventæ radicis 4, & per ejus triplum 3 X 16, ideſt per 48, qui ponatur in D, dividatur membrum 155, quotiens 3 erit altera radicis figura, quæ ponatur in R.

Radicis 43 fiat cubus (79.) 79507, qui ſubtrahatur ex utroque membro dati numeri A; cumque nihil ſuperſit, ſignum eſt numerum 43 eſſe radicem cubicam dati numeri A.

94. Quando cubus jam inventæ radicis excedit numerum, à quo *ſubtrahendus eſt*, tunc unitate minuatur ultima radicis figura, ut videre eſt in ſequenti exemplo.

Extrahenda ſit radix tertia a numero A, ideſt 155720872, qui dividatur in membra, ut antea diximus. Primum membrum ſiniſtrorſus erit 155, hujus radix cubica proxime minor (92.) eſt 5, quæ dextrorſum ponatur in R, ejuſque cubus 125 ſubtrahatur a primo membro 155, reſiduum erit 30, cui addatur prima nota 7 membri ſequentis, fiet 307, qui dividatur per 25 X 3, ideſt per 75 triplum quadratum radicis 5, quotiens eſt 4, qui ponendus eſſet in R pro ſecunda radicis figura, & haberetur radix 54; hujus cubus 157464 ſubtrahendus eſſet a duobus primis membris numeri A, ſcilicet a numero 155720, quod fieri nequit; proindeque quotiens 4 unitate minuatur, & ponatur 3 in radice poſt notam 5, fiet 53, cujus tertia poteſtas, ſeu cubus 148877 ſubducatur a prædicto numero 155720, reſiduum erit 6843, cui dextrorſus adjungatur ſequens nota 8 tertii membri, habebitur numerus 68438, qui diviſus per numerum C, ideſt per triplum quadratum radicis inventæ 53, quod eſt 8427, dat quotientem 8, qui ponatur in R pro tertia radicis figura. Deinde fiat cubus totius radicis 538, qui erit 155720872, & ſubtrahatur ex numero A, reſiduum erit 0; conſe-

A	R
155.720.872	538
125	D
307	75
148877	C
68438	8427
155720872	
0	

quen-

quenter inventus numerus R, ideſt 538, eſt radix cubica dati numeri A.

Si diviſor inventus non continetur in membro dividendo, tunc 95.
ponatur 0 in radice, & totius inventæ radicis cubus ſubtrahatur, ut ſupra dictum fuit; reſiduo autem ſemper addatur prima nota ſequentis membri, & numerus, qui inde oritur, dividatur per triplum quadratum totius jam inventæ radicis.

Ut in appoſito exemplo, quia 12 triplum quadratum jam inventæ radicis 2 non continetur in membro dividendo 9, ponitur 0 in radice poſt jam inventam notam 2: poſtea cubus radicis 20, ideſt 8000 ſubtrahitur ex duobus prioribus membris dati numeri, ideſt ex numero 8998, & reſiduo 998 dextrorſum additur prima figura 9 ſequentis membri 912, & fit numerus 9989, qui dividitur per 1200 triplum quadratum jam inventæ radicis 20: reliqua vero ſiunt ut in antecedentibus exemplis.

8.998.912. | 208
8
09 | 12
8000
9989 | 1200
8998912
0

Quod ſi ex dato numero radix prædicto modo 96.
extrahi nequit, ſignum eſt, datum numerum non eſſe cubum, neque habere radicem cubicam, quæ numeris exprimi poſſit.

Propinquior autem radix, quæ a vera inſenſibiliter differat, invenitur addendo aliquot cifrarum ternarios ad ipſum numerum datum, & ex eodem numero cum prædictis cifris extrahendo radicem cubicam eo modo, quo factum eſt ſupra. Deinde ab inventa radice totidem dextrorſum ſecentur notæ, quot cifrarum ternarii adjecti fuere; reliquæ notæ ſiniſtrorſum dabunt radicem integram proxime minorem, atque eadem radix integra una cum fractione, cujus numerator ſint ipſæ rejectæ figuræ, & denominator ſit unitas cum tot cifris, quot cifrarum ternarii additi fuerunt, erit radix proximior. Sic numero 12, qui cubus non eſt, additis duobus cifrarum ternariis, fit numerus 12000000, cujus radix tertia proxime minor eſt 228, a qua ſectis duabus figuris ob duos cifrarum ternarios additos, quibus ſubſcribatur unitas cum duabus cifris, erit $2\frac{28}{100}$ radix propinquior, quæ non differt una centeſima unitatis parte a vera radice. Si tres, aut plures addantur cifrarum ternarii, radix ſemper veræ radici proximior invenietur.

12.000.000 | $2\frac{28}{100}$
8
40 | 12
10648
13520 | 1452
11852352
147648

PRO-

PROBLEMA QUARTUM,

Radicem quadratam ex Algebraicis Quantitatibus extrahere.

Reſolutio.

Si datæ quantitates ſunt ſimplices, extrahitur radix quadrata dividendo per numerum binarium omnes exponentes ejuſdem quantitatis.

Sic quantitatis a^2 radix eſt a^1, ſeu a, quia $a \times a$ reſtituit a^2.

Item quantitatum a^4, b^8, c^6, radices quadratæ erunt a^2, b^4, c^3.

Similiter radix quadrata poteſtatis a^7 eſt $a^{\frac{7}{2}}$, & quantitatis b^3 erit $b^{\frac{3}{2}}$. Radix quadrata quantitatis $a^2\, b^3\, c^4$ erit $a \frac{3}{2}\, b\, c^2$, &c.

98. Si data quantitas habet numerum coeficientem, in primis extrahitur radix ex numero coeficiente, *juxta regulas traditas in præcedenti* Problemate Secundo; poſtea ex quantitatibus litteralibus, *juxta præcedentem* numerum. Ut radix quadrata quantitatis $81\, a^2\, b^6$ eſt $9\, a\, b^3$, quia $9\, a\, b^3 \times 9\, a\, b^3$ reſtituit $81\, a^2\, b^6$. Item radix quadrata quantitatis $324\, a^8\, b^6$ eſt $18\, a^4\, b^3$.

99. Si autem data quantitas ſit compoſita, ut $a^2 + 2ab - 2ac + b^2 - 2bc + c^2$, tunc ex aliquo termino, qui ſit perfectus quadratus, ut ex a^2 extrahatur radix, quæ *erit* a (97.), atque ponatur dextrorſum interjecta lineola; deinde per duplum inventæ radicis a, ideſt per 2 a dividantur omnes termini datæ quantitatis, qui dividi poſſunt in integris; dividantur nempe termini $+ 2ab$, & $- 2ac$ per 2 a, & quotientes $+ b$, & $- c$ ponantur in radice poſt jam inventum terminum a, atque erit $a + b - c$ radix quæſita. Nam fiat quadratum inventæ radicis $a + b - c$, & ſubtrahatur ex data quantitate, nihil remanebit; conſequenter $a + b - c$ eſt radix quadrata datæ quantitatis.

Quod ſi poſt ſubtractionem aliquid remanet, ſignum erit datam quantitatem non eſſe quadratum.

100. Præterea radix quadrata cujuslibet quantitatis exprimitur ponendo eandem quantitatem ſub hoc ſigno $\sqrt[2]{}$, vel $\sqrt{}$, quod *ſignum radicale* appellatur.

Sic $\sqrt[2]{64}$ idem ſignificat ac 8; $\sqrt[2]{a^2}$, vel $\sqrt{a^2}$ idem valet ac a. Item $\sqrt{15}$ indicat radicem ſecundam numeri 25. $\sqrt{ab - cm}$ ſignificat radicem quadratam quantitatis $ab - cm$. Atque hac ratione extrahitur radix quadrata ex qualibet quantitate, quæ non ſit quadratum perfectum.

Corollarium.

101. Quapropter ut habeatur quadratum cujuſvis quantitatis poſitæ ſub ſigno radicali, ſatis eſt eam ponere extra ſignum.

Ut

Ut quadratum quantitatis $\sqrt{25}$ eſt 25; nam ex dictis $\sqrt{25}$ ſignificat 5, & quadratum numeri 5 eſt 25; ergo $\sqrt{25} \times \sqrt{25}$ producit 25.

Eadem ratione $\sqrt{15} \times \sqrt{15} = 15$. Item $\sqrt{a-b} \times \sqrt{a-b}$ producit $a - b$.

PROBLEMA QUINTUM.

Radicem cubicam ex Algebraicis Quantitatibus extrahere. 102.

Reſolutio.

Ex quantitatibus ſimplicibus radix cubica extrahitur dividendo per numerum 3 omnes exponentes datarum quantitatum; ideoque radix tertia quantitatis a^3 eſt a, quia $a \times a \times a$ reſtituit a^3.

Item quantitatum a^6, b^9, c^{12}, radices cubicæ ſunt a^2, b^3, c^4.

Similiter quantitatis b^2 radix tertia eſt $b^{\frac{2}{3}}$, quia $b^{\frac{2}{3}} \times b^{\frac{2}{3}} \times b^{\frac{2}{3}}$ producit $b^{\frac{6}{3}}$, nimirum reſtituit b^2 (32.).

Cum vero habent numeros coeficientes, tunc prius extrahitur radix tertia ex numeris coeficientibus, juxta regulas traditas in antecedenti Problemate Tertio. 103.

Itaque quantitatis $8a^6b^3$ radix cubica erit $2a^2b$. Item radix quantitatis $125a^{12}b^3c^6$ eſt $5a^4bc^2$.

Quod ſi data quantitas ſit compoſita, ut 104.
$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, tunc per antecedentes regulas extrahatur radix cubica ex aliquo termino, qui ſit perfecte cubus, ut ex a^3, & ejus radix a dextrorſum ponatur, eritque primus radicis terminus. Poſtea per triplum quadratum inventæ radicis a dividantur omnes termini diviſibiles, nimirum in hoc exemplo per $3a^2$ dividatur terminus $-3a^2b$, & quotiens $-b$ ponatur in radice poſt terminum a. Fiat cubus totius radicis $a - b$, erit
$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, quo ſubtracto ex data quantitate, nihil remanet; adeoque $a - b$ eſt radix tertia datæ quantitatis. Hujus operationis ratio ex ipſa cuborum geneſi patet.

Si ex data quantitate radix tertia prædicta ratione extrahi nequit, ponatur data quantitas ſub ſigno radicali, ſupra quod ſcribatur numerus 3. 105.

Sic $\sqrt[3]{a^4 - bc}$ indicat radicem tertiam quantitatis $a^4 - bc$. Similiter $\sqrt[3]{8a^3}$ ſignificat $2a$, ideſt radicem cubicam quantitatis $8a^3$. Item $\sqrt[3]{512}$ idem valet ac 8; quod de aliis quibuſcumque magnitudinibus intelligatur.

Corollarium.

Hinc ſequitur cubum cujuſvis quantitatis ſub ſigno radicali $\sqrt{}$ poſitæ obtineri ſcribendo eandem quantitatem extra ſignum. Sic cubus quantitatis $\sqrt[3]{64}$ eſt 64; nam $\sqrt[3]{64}$ idem omnino ſignificat ac 4; ſed 106.

cubus numeri 4 eſt 64; ergo cubus quantitatis $\sqrt[3]{64}$ erit etiam 64. Similiter cubus quantitatis $\sqrt[3]{abc}$ eſt abc; atque ita de reliquis.

Scholion.

107. Si ex data fractione extrahenda ſit radix quadrata, vel cubica, tum extrahatur quæſita radix tam a numeratore, quam a denominatore ejuſdem fractionis. Sic radix quadrata fractionis $\frac{1}{4}$ erit $\frac{1}{2}$, radix cubica fracti $\frac{8}{27}$ erit $\frac{2}{3}$.

Similiter radix quadrata fractionis $\frac{a^6}{b^2}$ erit $\frac{a^3}{b}$. Quantitatis vero $\frac{c}{m}$ radix quadrata erit $\sqrt{\frac{c}{m}}$, vel $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{m}}$. Item radix cubica quantitatis $\frac{a^3}{c^6}$ erit $\frac{a}{c^2}$; & quantitatis $\frac{c}{b}$ radix cubica erit $\sqrt[3]{\frac{c}{b}}$, vel erit $\frac{\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{b}}$. & ſic de cæteris.

108. Præterea radix quadrata cujuſvis fractionis invenitur multiplicando numeratorem per denominatorem, & ex producto radicem quadratam extrahendo, cui ſubſcribatur denominator datæ fractionis.

Sic ut inveniatur radix quadrata fractionis $\frac{3}{12}$, muliplicetur 3 *in* 12, atque ex producto 36 extrahatur radix ſecunda, quæ eſt 6, cui ſubſcribatur denominator 12, erit $\frac{6}{12}$, ideſt $\frac{1}{2}$ radix quæſita.

Atque hæc ſunt, quæ de utroque Calculo, Numerico nempe, & Litterali ſtudioſorum adoleſcentium utilitati conſulens tradere exiſtimavi. Nunc ut facilior iiſdem ad Geometriæ Planæ Elementa percipienda aditus pateat, ad univerſam Proportionum Doctrinam explanandam gradum faciamus.

ELE-

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ
LIBER PRIMUS.
De Quantitatum rationibus, & proportionibus.
DEFINITIO PRIMA.

Quantitates omnes, quæ inter ſe comparatæ æquales ſunt, vel inæquales, dicuntur *Quantitates Homogeneæ*, ſeu *ejuſdem generis*. Duo quilibet numeri, ſi inter ſe comparentur, æquales erunt, vel inæquales; ideoque omnes numeri ſunt quantitates ejuſdem generis.

Similiter omnes longitudines inter ſe, omnes ſuperficies inter ſe, &c, ſunt magnitudines ejuſdem generis; quia ſi duæ longitudines inter ſe comparentur, vel erunt æquales, vel una erit altera major. Idem intelligatur de reliquis quantitatibus.

Definitio II.

Quantitates vero, quæ inter ſe comparari nequeunt, quæ nempe æquales, vel inæquales dici non poſſunt, appellantur *Quantitates Heterogeneæ*, ſeu *diverſi generis*. Sic pondus, & longitudo ſunt quantitates heterogeneæ; neque enim dici poteſt datum quodcumque pondus æquale eſſe cuilibet datæ longitudini, vel ea majus, vel minus. Et ſic de cæteris.

Definitio III.

Quantitates homogeneæ, quæ aliquam communem menſuram habent, dicuntur *quantitates commenſurabiles*. Omnes numeri ſunt commenſurabiles, quia unitas eſt communis omnium numerorum menſura (Arith. 39.). Similiter linea ſeptem pedum, & linea duodecim pedum longitudinis ſunt lineæ commenſurabiles, quia alia linea unius pedis longitudinis eas dimetitur.

Definitio IV.

Illæ vero magnitudines ejuſdem generis, quibus nulla inveniri poteſt communis menſura, quantitates *incommenſurabiles* vocantur.

Generaliter duæ quantitates dicuntur commenſurabiles, quando prima ad ſecundam habet eandem habitudinem, ſeu relationem, quam habet numerus aliquis ad alium numerum. Incommenſurabiles vero ſunt, cum habitudo, ſeu ratio unius ad alteram non eſt ſicut numerus ad numerum, nimirum numeris indicari nequit.

Definitio V.

Quoties quælibet data quantitas cum alia ejuſdem generis confertur, comparatio illa unius quantitatis ad alteram appellatur *Ratio*, quæ duplex eſt, Arithmetica nempe, & Geometrica.

Definitio VI.

Arithmetica ratio dicitur, quando conſideratur differentia inter duas datas quantitates: ut comparando numerum 12 cum numero 4, ſi conſideremus numerum 12 excedere numerum 4 per 8 unitates, tunc comparatio numeri 12 ad numerum 4 vocatur ratio Arithmetica. Similiter ratio numeri 5 ad numerum 7 erit Arithmetica, ſi conſideremus numerum 5 per duas unitates deficere a numero 7.

Definitio VII.

Ratio vero *Geometrica* appellatur, quando animadvertitur primam quantitatem continere ſecundam, vel in ea contineri. Sic ratio numeri 12 ad numerum 4 dicitur geometrica, ſi conſideremus numerum 12 triplum eſſe numeri 4. Similiter ratio numeri 2 ad numerum 14 erit geometrica, ſi nos animadvertamus numerum 2 eſſe ſeptimam partem numeri 14.

Definitio VIII.

Omnis igitur ratio a duobus terminis conſtituitur, quorum primus, qui nempe ad alterum refertur, dicitur *Antecedens rationis*; ſecundus vero terminus, ad quem primus refertur, dicitur *Conſequens* ejuſdem *rationis*: ut in ratione 12 ad 3, numerus 12 eſt antecedens, & numerus 3 eſt conſequens ejuſdem rationis.

Inter antecedentem, & conſequentem cujuſvis datæ rationis geometricæ brevitatis cauſſa ponuntur, duo puncta, quæ ſignificant *ad*. Sic ratio numeri 12 ad numerum 3 ita ſcribitur, 12 : 3, & legitur 12 ad 3. Item c : m, legitur c ad m.

Definitio IX.

In omni ratione geometrica quantitas illa, quæ habitudinem exprimit, ſeu reſpectum antecedentis ad conſequentem, appellatur *nomen rationis*, vel *quantitas*, ſeu *valor rationis*, vel *rationis exponens*. Itaque nomen rationis 12 : 3 eſt 4, quia numerus 12 quadruplus eſt numeri 3. Nomen, ſeu valor rationis 3 : 12 erit $\frac{1}{4}$, quia 3 eſt quarta pars numeri 12. Atque ita de reliquis.

Defi-

Definitio X.

Quapropter cujuſvis geometricæ rationis nomen, ſeu valor invenitur dividendo antecedentem per conſequentem: ut nomen rationis 18 : 6 erit $\frac{18}{6}$, ideſt 3. Quantitas ſeu valor rationis 14 : 6 erit $\frac{14}{6}$, ideſt $2\frac{1}{3}$ (Arith. 57.). Item rationis 7 : 21 valor erit $\frac{7}{21}$, nimirum $\frac{1}{3}$; & rationis 12 : 28 valor erit $\frac{12}{28}$, ideſt $\frac{3}{7}$.

Similiter nomen, ſeu valor rationis cm : c erit $\frac{cm}{c}$, ideſt m; & rationis a : ac valor erit $\frac{a}{ac}$, ſive $\frac{1}{c}$.

Definitio XI.

Quælibet igitur geometrica ratio æqualis eſt fractioni, cujus numerator ſit antecedens rationis, & denominator ſit conſequens ejuſdem rationis. Nam exempli gratia valor rationis 15 : 5, per ea, quæ diximus in antecedenti Definitione, eſt 3; item valor fractionis $\frac{15}{5}$ eſt etiam 3; ergo (axiom. 1.) ratio 15 : 5 æqualis eſt fractioni $\frac{15}{5}$.

Similiter ratio a : c æqualis eſt fractioni $\frac{a}{c}$: conſequenter data qualibet ratione a : m, habemus fractionem æqualem $\frac{a}{m}$; & e converſo data qualibet fractione $\frac{b}{c}$, æqualem habemus geometricam rationem b : c.

Definitio XII.

Rationes Geometricæ ſimiles, & eadem, ſeu æquales dicuntur illæ, quæ habent valores æquales, ſive quarum antecedentes eandem habitudinem, ſeu reſpectum habent ad ſuos conſequentes. Itaque rationes 12 : 3, 20 : 5, 28 : 7, &c. ſunt rationes æquales, quia habent idem nomen, ſeu eundem valorem 4; eſt enim $\frac{12}{3} = \frac{20}{5} = \frac{28}{7} = 4$ (Arith. 57.)

Item rationes 2 : 8, 3 : 12 ſunt æquales inter ſe, quia $\frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ (Arith. 51.).

Similiter ratio ac : c æqualis eſt rationi am : m; nam valor rationis ac : c eſt $\frac{ac}{c}$, ideſt a; & valor rationis am : m eſt $\frac{am}{m}$, nimirum eadem quantitas a.

Generaliter ratio a : b ſemper æqualis erit rationi c : m, quoties fuerit $\frac{a}{b} = \frac{c}{m}$; & econverſo ſi fuerit a : b = c : m, erit etiam $\frac{a}{b} = \frac{c}{m}$.

Conſequenter æquales rationes conſtituunt fractiones æquales; & viciſſim æquales fractiones conſtituunt rationes æquales.

De-

Definitio XIII.

Quando cujuſvis datæ rationis conſequens antecedenti comparatur, tunc oritur alia ratio, quæ vocatur *Ratio inverſa*, vel *reciproca* datæ rationis. Ut data ratione 12: 4, ratio inverſa hujus rationis erit 4: 12. Similiter rationis a:c ratio inverſa erit c:a; & ſic de reliquis.

Definitio XIV.

Proportio, ſive ut aliis placet, *proportionalitas*, vel *analogia* eſt æqualium rationum comparatio. Itaque ſi duæ æquales rationes (Defin. 12.) 12 : 4, & 15 : 5 inter ſe comparentur, fiet proportio ita, 12 : 4 quemadmodum 15 : 5; ideſt antecedens 12 eandem habitudinem, ſeu relationem habet ad ſuum conſequentem 4, quam habet antecedens 15 ad ſuum conſequentem 5.

Similiter duæ rationes æquales am : a, & bm : b conſtituunt proportionem am ad a, ſicuti bm ad b; ideſt quam habitudinem, ſeu reſpectum habet am ad a, eandem pariter relationem habet bm ad b.

Definitio XV.

Quapropter, quatuor termini ſunt geometrice proportionales, quando primus eodem modo ad ſecundum refertur, ac tertius ad quartum. Proportio vero quatuor terminorum hac ratione ſcribitur
12 : 4 : : 15 : 5, vel 12 : 4 = 15 : 5, & legitur 12 ad 4 ſicuti 15 ad 5, vel 12 ad 4 æquale 15 ad 5; & ſic de cæteris.

Definitio XVI.

Quoniam proportio geometrica quatuor terminorum a duabus æqualibus rationibus conſtituitur, & quælibet ratio duos terminos habet, antecedentem nempe, & conſequentem; hinc evidenter ſequitur, in omni proportione duos eſſe antecedentes, primum nempe, & tertium terminum; itemque duos conſequentes, ſecundum, & quartum terminum. Atque primus terminus dicitur *primus antecedens*; tertius vero terminus *ſecundus antecedens* vocatur. Secundus terminus *primus conſequens* appellatur, & quartus terminus *ſecundum* proportionis *conſequens* dicitur.

Præterea primus terminus, & quartus dicuntur *termini extremi*, vel *extrema*; ſecundus vero, & tertius vocantur *termini medii*, vel *media*. Inſuper antecedentes inter ſe, & conſequentes etiam inter ſe dicuntur termini *homologi*, ideſt *ejuſdem nominis*. Ut in proportione 12 : 3 : : 8 : 2, termini 12, & 8 vocantur termini homologi, quia ſunt ambo antecedentes. Similiter termini 3, & 2 dicuntur homologi, ſeu ejuſdem nominis; ſunt enim ambo conſequentes.

Defi-

Definitio XVII.

Quoties quatuor termini ſunt proportionales, & ſecundus terminus non eſt æqualis tertio, tunc ea *proportio diſcreta* appellatur, ut $8:2::20:5$, vel
$a:b::c:m$.

Definitio XVIII.

Cum vero ſecundus terminus æqualis eſt tertio, ſive quando primus terminus ad ſecundum eandem rationem habet, quam idem ſecundus ad tertium; tunc ea *proportio continua* vocatur, & tribus ſolum terminis exprimitur, atque indicatur hoc ſigno $\div$, quod eidem proportioni præponitur. Ut proportio
$24:12::12:6$ eſt continua, & ſcribitur hoc modo $\div 24:12:6$, atque legitur, proportio geometrica continua 24 ad 12 ad 6, vel 24 ad 12 eandem rationem habet, quam idem 12 ad 6. Adeoque in proportione continua ſecundus terminus gerit vices conſequentis, & antecedentis; eſt nempe conſequens primi, & antecedens tertii termini.
Similiter proportio
$a:b::b:c$ eſt continua, & ita ſcribitur $\div a:b:c$, atque legitur a ad b, ſicuti b ad c.

Definitio XIX.

Proportio Geometrica continua, quæ pluribus quam tribus conſtat terminis, vocatur *Progreſſio Geometrica*, quæ ad infinitos terminos continuari, vel extendi poteſt, ſive termini creſcant, ſive decreſcant.
Sic Progreſſio $\div 1:2:4:8:16:32:64:128:256$ &c. eſt progreſſio creſcens.
Progreſſio vero $\div 8:4:2:1:\frac{1}{2}:\frac{1}{4}:\frac{1}{8}:\frac{1}{16}:\frac{1}{32}:\frac{1}{64}$ &c. eſt decreſcens; atque ambæ in infinitum continuari poſſunt, ut per ſe patet.

PROPOSITIO PRIMA.

Theorema.

Datis quatuor terminis proportionalibus, productum extremorum ſemper æquale erit producto mediorum.

Sint quatuor termini proportionales
$a:b::c:m$, dico, productum am extremorum a, & m, æquale eſſe producto bc mediorum b, & c.

Demonſtratio.

Quoniam ex hypotheſi eſt
$a:b::c:m$, ſive (Defin. 15.) eſt

a:b

a:b = c:m, & æquales rationes conſtituunt fractiones æquales (Defin. 12.); ergo erit $\frac{a}{b} = \frac{c}{m}$. Multiplicentur æquales quantitates $\frac{a}{b}$, & $\frac{c}{m}$ per bm (quod eſt productum conſequentium terminorum, ſeu denominatorum b, & m), erunt (Algeb. 68.) producta $\frac{abm}{b}$, & $\frac{bcm}{m}$, ideſt (Algeb. 36.) am, & bc æqualia inter ſe (Axiom. 4.); erit nempe am = bc.

Quapropter datis quatuor terminis proportionalibus, ſive numeri ſunt, ſive longitudines, ſive alterius cujuſcumque generis quantitates, ſemper erit productum ex primo in quartum æquale producto ſecundi termini in tertium. Quod erat demonſtrandum.

In hac Propoſitione generaliſſime demonſtravimus quod Euclides de lineis in prima parte Propoſitionis 16. Lib. 6., & de numeris in prima parte Propoſitionis 19. Lib. 7. demonſtrat.

Sit exemplum numericum; ponamus nempe a = 21, b = 7, c = 6, & m = 2, habebitur proportio
21:7::6:2; & multiplicando extrema, atque media, erit æquatio
21 × 2 = 7 × 6, ideſt 42 = 42.

PROPOSITIO SECUNDA.

Theorema.

Si quatuor termini ea conditione inter ſe comparati ſint, ut productum ex primo in quartum æquale ſit producto ſecundi termini in tertium, erunt iidem termini proportionales inter ſe.

Dati ſint quatuor termini
b, a, m, c, & rectangulum (Algeb. 77.) ſeu productum bc extremorum æquale ſit producto am mediorum, dico, datos terminos eſſe inter ſe proportionales; erit nempe
b:a::m:c.

Demonſtratio.

Etenim ex hypotheſi habemus bc = am, & dividendo æquales quantitates bc, & am per ac (quod eſt productum ſecundi termini a in tertium c), quotientes $\frac{bc}{ac}$, & $\frac{am}{ac}$ (Axiom. 5.) erunt æquales; erit nempe $\frac{bc}{ac} = \frac{am}{ac}$, ideſt $\frac{b}{a} = \frac{m}{c}$ (Algeb. 62.). Sed æquales fractiones conſtituunt æquales rationes (Defin. 12.); ideoque cum oſtenſum ſit $\frac{b}{a} = \frac{m}{c}$, erit pariter b : a = m : c; ſive b : a : : m : c (Defin. 15.). Ergo datis quatuor terminis cujuſvis generis, ſi productum extremorum æquale ſit producto mediorum, ſemper dati termini erunt proportionales. Quod erat oſtendendum.

Hoc Theorema generalem continet Demonſtrationem ejus, quod ab Eucli-

Euclide oſtenditur in ſecunda parte Propoſitionis 16. Lib. 6. de lineis, & in parte ſecunda Propoſitionis 19. Lib. 7. de numeris.

Sint numeri 7, 28, 13, 52, ejus conditionis, ut 7×52 adæquet productum 13×28, erit $7 : 28 :: 13 : 52$, ut per ſe patet.

Corollarium.

Quapropter duo qualibet producta æqualia, ſive quælibet æquatio reſolvi poteſt in quatuor terminos proportionales, quorum extremi ſint factores unius producti, & medii termini ſint factores alterius æqualis producti; quod dicitur *æquationem diſſolvere*.

Sit æquatio

$12 \times 4 = 24 \times 2$, diſſolvendo hanc æquationem, ſemper erit proportio

$12 : 24 :: 2 : 4$, vel

$12 : 2 :: 24 : 4$, vel

$4 : 24 :: 2 : 12$, vel

$4 : 2 :: 24 : 12$, vel

$24 : 12 :: 4 : 2$, vel

$24 : 4 :: 12 : 2$, vel

$2 : 12 :: 4 : 24$, vel

$2 : 4 :: 12 : 24$; quia ſemper productum extremorum adæquat productum mediorum; eſt enim

$12 \times 4 = 24 \times 2$, ſive, quod idem eſt,

$24 \times 2 = 12 \times 4$.

Generaliter ſit æquatio

$am = bc$, diſſolvendo erit

$a : b :: c : m$, vel

$a : c :: b : m$, aut

$m : b :: c : a$, vel

$m : c :: b : a$, vel

$b : a :: m : c$, aut

$b : m :: a : c$, vel

$c : a :: m : b$, aut

$c : m :: a : b$; ſemper enim productum extremorum æquale eſt producto mediorum, cum ex hypotheſi ſit

$am = bc$.

PROPOSITIO TERTIA.

Problema.

Datis tribus terminis invenire quartum terminum proportionalem.

Dati ſint tres termini a, b, m, & inveniendus ſit quartus, ad quem tertius m eandem rationem habeat, quam habet primus a ad ſecundum b.

Reſolutio.

Multiplicetur ſecundus b per tertium m, & productum bm dividatur per primum terminum a, quotiens $\frac{bm}{a}$ erit quartus quæſitus terminus proportionalis.

Demonſtratio.

Quia x poteſt ſignificare quamlibet incognitam quantitatem (Algeb. 3.), ideo quartus quæſitus terminus vocetur *x*, atque tunc habebitur proportio a : b : : m : x; & multiplicando media, & extrema per primam Propoſitionem, erit productum extremorum $ax = bm$ producto mediorum; & dividendo totam æquationem, ideſt duo producta æqualia ax, & bm per eandem quantitatem a, quotientes erunt æquales (Axiom. 5.), erit nempe $x = \frac{bm}{a}$. Ergo quartus quæſitus terminus æqualis eſt quotienti, qui oritur dividendo productum ex ſecundo termino in tertium, per primum terminum. Quod erat faciendum, & demonſtrandum.

Scholion.

In hac Propoſitione præcipuam celeberrimamque demonſtravimus Arithmetices regulam, quæ *Proportionum Regula* vocatur, atque ob ejus præſtantiam, & immenſam fere utilitatem *Regula Aurea* nuncupatur. Vulgo autem dicitur *Regula trium*; quia ex tribus datis numeris quartum quæſitum proportionalem invenit, ut ante demonſtravimus.

Per hanc regulam, quæ facillima eſt iis, qui multiplicationem, & diviſionem perfecte didicerunt, difficiliores quæſtiones Arithmeticæ reſolvuntur. Ut autem juvenes hujus regulæ utilitatem, atque excellentiam clarius intelligant, optimum erit nonnullas quæſtiones reſolvere.

Cum autem in omni quæſtione ex tribus datis numeris duo ſemper ſint homogenei, & alter ſit ejuſdem generis cum quarto quæſito; itaque in primis ordine diſponendi ſunt dati numeri, ita ut medium locum teneat is, qui homogeneus eſt cum quarto inveniendo; tertio loco ponatur is, qui quæſtionem annexam habet; & is, qui huic homogeneus eſt, primo loco ſcribatur. Poſtea, juxta antecedentem Demonſtrationem, multiplicetur ſecundus in tertium, & productum dividatur per primum numerum, quotiens erit quartus quæſitus numerus.

Quæſtio Prima.

Eſt Tabellarius, qui percurrit milliaria 72, horis 12, quæritur quot horis percurret millia 420. Terminus, qui homogeneus eſt cum quarto quæſito ſunt horæ 12; hic ponatur ſecundo loco. Terminus, qui annexam habet quæſtionem ſunt milliaria 420; hic ſcribatur tertio lo-

eo: primo autem loco ponatur terminus huic homogeneus, nempe millia 72; ſcilicet fiat

Mil. Hor. Mil. Hor.

72 : 12 : : 420 : . Multiplicetur 420 per 12, & productum 5040 dividatur per 72, quotiens 70 dat quartum quæſitum terminum; eſt enim 72 : 12 : : 420 : 70, quia

72 X 70 = 12 X 420 = 5040. Adeoque horis 70 Tabellarius percurret prædicta milliaria 420.

Quæſtio Secunda.

Argenteis libris noſtratibus 192 emptæ fuerunt 16 ulnæ panni, quæritur prætium ulnarum 9 ejuſdem panni. Ordine diſponantur termini, ut antea diximus, nempe

ulnæ, lib. ulnæ, lib.

16 : 192 : : 9 : . Atque ducto 9 in 192, productum 1728 dividatur per 16, quotus 108 erit quæſitus numerus librarum.

Secundo cum in data quæſtione plures quam tres inveniuntur termini, nimirum 5, vel 7, vel 9, aut etiam plures, tunc regula proportionum dicitur *Compoſita*; atque inter datos terminos tres ſemper ſunt præcipui, alii vero minus principales, qui cum terminis principalibus componuntur, ut fiant tres ſolum termini: ſicuti videre eſt in exemplis ſequentibus.

Quæſtio Tertia.

Milites 48 diebus 6 expenderunt argenteas libras 432, quæritur quot libras expendere debeant milites 36 diebus 9.

In hoc problemate tres præcipui termini ſunt milites 48, libræ 432, & milites 36. Ad milites 48 ſpectant dies 6, & ad milites 36 ſpectant dies 9; adeoque multiplicetur 48 in 6, & 36 in 9, fient duo producta 288, & 324; quorum primum 288 erit primus terminus; ſecundum vero productum 324 erit tertius terminus, & pro ſecundo ponantur libræ 432; fiat nempe

288 : 432 : : 324 :

Multiplicetur 432 per 324, & productum 139968 dividatur per primum terminum 288, quotiens 486 erit quæſitus terminus: proindeque milites 36 diebus 9 ſolvere debent libras 486.

Quæſtio Quarta.

Mercatores 4 libris 800 menſibus 3 lucrantur libras 20; quæritur quot libras lucrati ſint mercatores 6 libris 600 menſibus 8; nempe 4, 800, 3 : 20 : : 6, 1600, 8 : x. Tres præcipui termini ſunt mercatores 4, libræ 20, & mercatores 6. Ad mercatores 4 ſpectant libræ 1600, & menſes 8; adeoque multiplicetur 4 in 800 in 3, & productum 9600 erit primus terminus. Similiter multiplicetur 6 in

1600 in 8, & productum 76800 erit tertius terminus; ſecundus vero erunt libræ 20: itaque erit

9600 : 20 : : 76800 : x. Ducatur 76800 in 20, & productum 1536000 dividatur per 9600, quotiens 160 erit numerus librarum, quæ a ſex mercatoribus libris 1600 menſibus 8 lucratæ fuerunt.

Tertio regula trium ſive ſimplex, ſive compoſita ſit, ſemper vocatur *directa*, quoties primus terminus eodem modo ad ſecundum refertur, ac tertius ad quartum quæſitum, ut in antecedentibus quæſtionibus. At quum data quæſtio talis eſt naturæ, ut quanto primus terminus major, aut minor eſt tertio, tanto quartus quæſitus major, vel minor eſſe debeat ſecundo; tunc regula dicitur *inverſa*, vel *everſa*, aut *reciproca*; atque tunc quæſitus terminus invenitur dividendo per tertium terminum productum ex primo in ſecundum. Exempla rem declarabunt.

Quæſtio Quinta.

Ex panno habente latitudinem unciarum 32 pro veſtimentis Marcelli poſitæ fuerunt ulnæ 9: quæritur quot ulnæ poſitæ ſint ex panno veſti ſubſuto, qui latitudinem habebat unciarum 24.

Quia, ut per ſe patet, quo major eſt latitudo panni, eo minor requiritur longitudo, ſeu numerus ulnarum panni ad veſtimenta perficienda; ideoque cum in hac quæſtione latitudo 24 ſecundi panni minor ſit latitudine 32 prioris, numerus quæſitus ulnarum ſecundi panni major erit numero ulnarum 9 primi panni. Conſequenter quanto primus 32 major eſt tertio termino 24, tanto quartus quæſitus major erit ſecundo 9. Quapropter ſi quartus quæſitus vocetur x, erit proportio

32 : 24 : : x : 9; & multiplicando media, atque extrema (Prop. 1.), erit æquatio

$24x = 32 \times 9$, ideſt $24x = 288$; & dividendo totam æquationem per 24, erit (Axiom. 5.) $x = \frac{288}{24}$, ideſt $x = 12$; ergo quartus quæſitus terminus eſt 12: nimirum 12 ulnæ panni lati uncias 24 eandem veſtem faciunt, ac ulnæ 9 panni habentis latitudinem unciarum 32. Quapropter in regula trium inverſa quartus terminus invenitur multiplicando primum terminum per ſecundum, & dividendo productum illud per tertium terminum, quotiens erit quartus quæſitus terminus.

Quæſtio Sexta.

In Urbe obſidione cincta ali poſſunt milites 1200 menſibus 8; quæritur quot menſibus ali poterunt milites 2400: paucioribus menſibus, ut patet, quia quo plures ſunt milites, eo citius conſumuntur annonæ. Itaque quanto primus terminus 1200 minor eſt tertio 2400, tanto quartus incognitus minor eſſe debet ſecundo termino 8; ideoque reſolvatur quæſtio per regulam inverſam, nimirum multiplicetur primus 1200 per ſecundum 8, & productum 9600 dividatur per ter-

tertium terminum 2400, quotiens 4 erit quartus quæſitus numerus: eſt enim

1200 : 2400 : : 4 : 8, ut evidens eſt.

Eadem methodo reſolvuntur omnes aliæ quæſtiones ad regulam proportionum ſpectantes. Reliquæ tres Arithmetices regulæ, nimirum *Societatis*, *Poſitionis*, vel *Falſi*, & *Alligationis* ex hac proportionum regula omnino pendent: ut videre eſt in Arithmetices Auctoribus, quos conſulant ii, qui eas perdiſcere cupiunt.

PROPOSITIO QUARTA.

Theorema.

Datis quatuor terminis proportionalibus, primus ad tertium eandem rationem habebit, quam habet ſecundus ad quartum. Atque hoc argumentandi genus dicitur Alternare, *vel* Permutare *rationem.*

Sint quatuor termini proportionales
a : b : : c : m, alternando erit
a : c : : b : m.

Demonſtratio.

Cum ex hypotheſi ſit a : b : : c : m, multiplicando media, atque extrema, erit (Prop. 1.) a m = b c; & diſſolvendo ex a per c (Coroll. Prop. 2.) erit a : c : : b : m. Quod erat demonſtrandum.

Eſt Propoſitio 16. *Libri* 5. *Euclidis*.

Sit 28 : 12 : : 7 : 3, alternando erit
28 : 7 : : 12 : 3, quia
28 × 3 = 7 × 12.

Corollarium.

Quapropter datis quatuor quantitatibus proportionalibus, ſit a : b : : c : m, ſi prima quantitas a æqualis fuerit tertiæ c, etiam ſecunda b erit æqualis quartæ m; ſi vero prima a major fuerit tertia c, etiam ſecunda b major erit quarta m. Item ſi prima a minor fuerit tertia c, etiam ſecunda b minor erit quarta m, quia alternando ſemper habetur a : c : : b : m.

Eſt Propoſitio 14. *Libri* 5. Euclidis.

PROPOSITIO QUINTA.

Theorema.

Si fuerint quatuor termini proportionales, ſecundus ad primum eandem rationem habebit, quam habet quartus ad tertium. Quod dicitur rationem invertere (*Defin.* 13.).

Sint quatuor termini proportionales
a : m : : c : b, invertendo erit
m : a : : b : c.

De-

Demonſtratio.

Habemus ex hypotheſi $a : m :: c : b$; ergo (Prop. 1.) erit $ab = cm$; & diſſolvendo æquationem (Coroll. Prop. 2.) erit $m : a :: b : c$. Quod erat oſtendendum.

Eſt Corollarium Propoſitionis quartæ Lib. 5. Euclidis.

Sit $3 : 18 :: 5 : 30$, invertendo erit
$18 : 3 :: 30 : 5$, ut evidens eſt.

PROPOSITIO SEXTA.

Theorema.

Datis quatuor terminis proportionalibus, ſumma primi, & ſecundi eandem rationem habebit ad ſecundum, quam habet ſumma tertii cum quarto ad eundem quartum. Hoc argumentandi genus appellatur Compoſitio rationis.

Sint quatuor magnitudines proportionales
$a : m :: b : c$, componendo erit
$a + m : m :: b + c : c$.

Demonſtratio.

Quoniam ex hypotheſi eſt $a : m :: b : c$, multiplicando media, & extrema erit (Prop. 1.) $ac = bm$. Utrique æquationis parti addatur cm productum conſequentium m, c, fiet (Axiom. 2.) nova æquatio
$ac + cm = bm + cm$, ideſt
$\overline{a + m} \times c = \overline{b + c} \times m$ (Algeb. 28.), quia multiplicando $a + m$ per c producit $ac + cm$, & multiplicando $b + c$ per m, dat $bm + cm$; & diſſolvendo æquationem
$\overline{a + m} \times c = \overline{b + c} \times m$, habebitur (Coroll. Prop. 2.) $a + m : m :: b + c : c$. Quod erat demonſtrandum.

Eſt Propoſitio 18. Lib. 5. Euclidis.

Sit $8 : 2 :: 20 : 5$, componendo erit
$8 + 2 : 2 :: 20 + 5 : 5$, ideſt
$10 : 2 :: 25 : 5$.

PRO-

PROPOSITIO SEPTIMA.

Theorema.

Quoties fuerint quatuor magnitudines proportionales, differentia inter primam, & ſecundam ad ſecundam eandem rationem habebit, quam habet differentia inter tertiam, & quartam ad eandem quartam. Hæc argumentatio dicitur Diviſio rationis.

Sit $a : b :: c : m$, dividendo erit
$a - b : b :: c - m : m$.

Demonſtratio.

Eſt $a : b :: c : m$; ergo (Prop. 1.) erit $am = bc$. Ab æqualibus productis am, & bc ſubtrahatur eadem quantitas bm, productum conſequentium b, & m, remanebit (Axiom. 3.)
$am - bm = bc - bm$, ſive, quod idem eſt (Algeb. 28.),
$\overline{a - b} \times m = \overline{c - m} \times b$; & diſſolvendo ex $a - b$ per b (Coroll. Prop. 2.) erit
$a - b : b :: c - m : m$. Quod erat oſtendendum.

Eſt Propoſitio 17. Libri 5. Euclidis.

Sit $21 : 7 :: 3 : 1$, dividendo erit
$21 - 7 : 7 :: 3 - 1 : 1$, ideſt
$14 : 7 :: 2 : 1$.

PROPOSITIO OCTAVA.

Theorema.

Datis quatuor magnitudinibus proportionalibus, ita erit prima ad differentiam inter primam, & ſecundam, ſicuti tertia ad differentiam inter tertiam, & quartam. Et hic argumentandi modus Converſio rationis *appellatur.*

Sit $a : b :: c : m$, convertendo erit
$a : a - b :: c : c - m$.

Demonſtratio.

Quia ex hypotheſi eſt $a : b :: c : m$, multiplicando media, & extrema (Prop. 1.) erit $am = bc$. Ex eodem producto ac antecedentium a, & c, ſubtrahantur æqualia producta am, & bc, reſidua erunt æqualia (Axiom. 3.), erit nempe
$ac - am = ac - bc$, ideſt (Algeb. 28.)

c —

$\overline{c - m} \times a = \overline{a - b} \times c$; & diſſolvendo æquationem ex a per $a - b$ (Coroll. Prop. 2.), erit proportio
$a : a - b :: c : c - m$. Quod erat demonſtrandum.
Eſt Propoſitio 19. Libri 5. Euclidis.
Sit $12 : 3 :: 28 : 7$, convertendo erit
$12 : 12 - 3 :: 28 : 28 - 7$, nempe
$12 : 9 :: 28 : 21$, quia
$12 \times 21 = 9 \times 28$.

PROPOSITIO NONA.

Axioma.

Quantitates æquales eandem rationem habent ad aliam quantitatem. Viciſſim eadem quantitas eandem rationem habet ad æquales quantitates.

Sit $a = b$, & data ſit alia quantitas c, erit $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ (Axiom. 5.); ideoque erit etiam
$a : c :: b : c$ (Defin. 12, 14.).
Similiter erit $\frac{c}{a} = \frac{c}{b}$ (Axiom. 5.); conſequenter erit $c : a :: c : b$ (Defin. 12, 14.).
Eſt Propoſitio 7. Libri 5. Euclidis.

PROPOSITIO DECIMA.

Axioma.

Magnitudines, quæ habent eandem rationem ad eandem quantitatem, ſunt inter ſe æquales. Similiter ſi eadem magnitudo eandem rationem habuerit ad alias quantitates, quantitates ipſæ erunt inter ſe æquales.

Sit $a : m :: b : m$, erit $a = b$ (Coroll. Prop. 4.), quia eſt $m = m$.
Præterea ſit $m : c :: m : b$, erit $c = b$ (Corollar. Prop. 4.), quia eſt $m = m$.
Eſt Propoſitio 9. Libri 5. Euclidis.

PROPOSITIO UNDECIMA.

Axioma.

Rationes, quæ ſunt ſimiles, ſeu æquales eidem rationi, vel æqualibus rationibus, ſunt etiam æquales inter ſe.

Sit a : b : : f : g, & c : m : : f : g, nimirum (Defin. 15.) a : b = f : g, & c : m = f : g, (Axiom. 1.) erit a : b = c : m, ideſt a : b : : c : m, ut per ſe patet.

Eſt Propoſitio 11. Libri 5. Euclidis.

PROPOSITIO DUODECIMA.

Theorema.

Si fuerint quotcunque magnitudines proportionales, ſeu quotcunque rationes æquales, colligendo, *ita ſe habebit ſumma omnium antecedentium ad ſummam omnium conſequentium, ſicuti quælibet antecedens ad ſuam conſequentem.*

Sint rationes æquales, ſeu quantitates proportionales am : a : : bm : b : : cm : c : : fm : f &c, colligendo erit am + bm + cm + fm : a + b + c + f : : cm : c, vel : : am : a &c.

Demonſtratio.

Multiplicetur primus terminus am + bm + cm + fm per quartum c, productum erit acm + bcm + ccm + cfm.

Similiter multiplicando ſecundum terminum a + b + c + f per tertium cm, oritur idem productum acm + bcm + ccm + fcm; ergo (Prop. 2.)] quatuor prædicti termini ſunt proportionales; eſt nempe am + bm + cm + fm : a + b + c + f : : cm : c, vel : : fm : f &c. Quod erat demonſtrandum.

Eſt Propoſitio 12. Libri 5. Euclidis.

Sint 8 : 2 : : 20 : 5 : : 12 : 3 : : 4 : 1 &c, erit
8 + 20 + 12 + 4 : 2 + 5 + 3 + 1 : : 8 : 2, ideſt
44 : 11 : : 8 : 2, vel : : 20 : 5 &c.

PROPOSITIO DECIMATERTIA.

Theorema.

Datis quatuor terminis proportionalibus, ſi antecedentes, vel conſequentes, vel primus & ſecundus terminus, vel tertius & quartus terminus multiplicentur, aut dividantur per eandem quantitatem, quatuor termini ſemper proportionales erunt.

Sit proportio a : f : : b : c, multiplicando, aut dividendo antecedentes a, & b, vel conſequentes f, & c, vel primam rationem, ideſt terminos a, & f, vel terminos b, & c per eandem quantitatem m, quatuor termini erunt ſemper proportionales, nimirum am : f : : bm : c, vel a : fm : : b : cm, &c;

item $\frac{a}{m}$: f : : $\frac{b}{m}$: c, vel

a : $\frac{f}{m}$: : b : $\frac{c}{m}$, &c.

Demonſtratio Partis Primæ.

Habemus a : f : : b : c; ergo (Prop. 1.) erit ac = fb; & multiplicando totam æquationem per m, (Axiom. 4.) erit acm = fbm, & diſſolvendo (Coroll. Prop. 2.) erit proportio am : f : : bm : c, vel a : fm : : b : cm, vel am : fm : : b : c, vel a : f : : bm : cm. Quod erat primo demonſtrandum.

Demonſtratio Partis Secundæ.

Æquatio ſuperius inventa, nempe ac = fb dividatur per m, (Axiom. 5.) habebitur $\frac{ac}{m} = \frac{fb}{m}$; & diſſolvendo æquationem (Coroll. Prop. 2.) erit $\frac{a}{m}$: f : : $\frac{b}{m}$: c, vel a : $\frac{f}{m}$: : b : $\frac{c}{m}$, vel $\frac{a}{m}$: $\frac{f}{m}$: : b : c, vel a : f : : $\frac{b}{m}$: $\frac{c}{m}$; ſemper enim productum extremorum adæquat productum mediorum, cum oſtenſum ſit eſſe $\frac{ac}{m} = \frac{fb}{m}$. Ergo patet propoſitum.

PROPOSITIO DECIMAQUARTA.

Theorema.

Si omnes termini cujuſvis datæ proportionis per eandem quantitatem, vel antecedentes per unam quantitatem, & conſequentes per aliam; vel duo primi termini per unam, & duo ultimi per aliam quantitatem multiplicentur, aut dividantur, quatuor termini ſemper proportionales erunt.

Data ſit proportio b : a : : f : g
primo multiplicando omnes terminos per quamlibet quantitatem m, erit nova proportio
am : bm : : fm : gm.

De-

Demonſtratio.

Data eſt proportio $b : a :: f : g$; adeoque erit æquatio (Prop. 1.) $bg = af$. Multiplicetur æquatio hæc per mm, & (Axiom. 4.) habebitur $bgmm = afmm$, & diſſolvendo (Coroll. Prop. 2.) erit $bm : am :: fm : gm$. Quod erat primum.

Secundo dividendo omnes terminos datæ proportionis per eandem quantitatem c, erit proportio
$\frac{b}{c} : \frac{a}{c} :: \frac{f}{c} : \frac{g}{c}$.

Demonſtratio.

Inventa æquatio $bg = af$ dividatur per cc, erit (Axiom. 5.) $\frac{bg}{cc} = \frac{af}{cc}$, & diſſolvendo erit
$\frac{b}{c} : \frac{a}{c} :: \frac{f}{c} : \frac{g}{c}$. Quod erat ſecundum.

Tertio ſi antecedentes multiplicentur per c, & conſequentes per m; vel prima ratio per c, & ſecunda per m, erit
$bc : am :: fc : gm$, vel $bc : ac :: fm : gm$.

Demonſtratio.

Æquatio $bg = af$ multiplicetur per cm, & (Axiom. 4.) erit $bgcm = afcm$; & diſſolvendo erit
$bc : am :: fc : gm$, vel erit $bc : ac :: fm : gm$.

Quarto ſi antecedentes dividantur per c, & conſequentes per m, vel prima ratio per c, & ſecunda per m, erunt proportionales
$\frac{b}{c} : \frac{a}{m} :: \frac{f}{c} : \frac{g}{m}$, vel $\frac{b}{c} : \frac{a}{c} :: \frac{f}{m} : \frac{g}{m}$.

Demonſtratio.

Dividatur æquatio ante inventa $bg = af$ per cm, erit (Axiom. 5.) $\frac{bg}{cm} = \frac{af}{cm}$; & diſſolvendo hanc æquationem (Coroll. Prop. 2.) erit
$\frac{b}{c} : \frac{a}{m} :: \frac{f}{c} : \frac{g}{m}$; item $\frac{b}{c} : \frac{a}{c} :: \frac{f}{m} : \frac{g}{m}$. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO DECIMAQUINTA.

Theorema.

Datis duabus, aut pluribus proportionibus, quæ habeant eoſdem conſequentes, erit ſumma priorum antecedentium ad communem conſequentem, ſicuti ſumma ſecundorum antecedentium ad eorum communem conſequentem.

Si autem habuerint eoſdem antecedentes, erit primus communis antecedens ad ſummam priorum conſequentium, ut ſecundus communis antecedens ad ſummam ſecundorum conſequentium.

Primo ſint proportiones $a : m :: c : g$, $b : m :: f : g$, quæ habeant eoſdem conſequentes m, & g, erit
$a + b : m :: c + f : g$.

Demonſtratio.

Ex datis proportionibus $a : m :: c : g$, $b : m :: f : g$ (Propoſ. 1.) oriuntur æquationes $ag = mc$, & $bg = mf$.

Si prima æquatio addatur ſecundæ, (Axiom. 2.) fiet alia æquatio
$ag + bg = mc + mf$, ideſt (Algeb. 28.)
$\overline{a + b} \times g = \overline{c + f} \times m$; & diſſolvendo (Coroll. Prop. 2.) erit
$a + b : m :: c + f : g$. Quod erat primo demonſtrandum.

Secundo datæ ſint proportiones
$a : c :: b : m$, & $a : f :: b : g$, quæ habeant eoſdem antecedentes a, & b, erit
$a : c + f :: b : m + g$.

Demonſtratio.

Habemus $a : c :: b : m$, & $a : f :: b : g$; conſequenter (Prop. 1.) erit $am = bc$, & $ag = fb$; atque addendo primam æquationem ſecundæ, (Axiom. 2.) erit
$am + ag = bc + fb$, ſive (Algeb. 28.)
$a \times \overline{m + g} = b \times \overline{c + f}$; & diſſolvendo erit
$a : c + f :: b : m + g$. Quod erat ſecundo demonſtrandum.

Prima pars hujus Propoſitionis eſt Propoſitio 24. Libri 5. Euclidis.

Definitio XX.

Ratio illa, cujus valor adæquat productum valorum aliarum rationum, dicitur *Ratio Compoſita* ex aliis datis rationibus. Sic ratio $30 : 5$ dicitur compoſita ex rationibus $14 : 7$, & $12 : 4$, quia

ejus

ejus valor $\frac{30}{5}$, ideſt 6 (Defin. 10.) æqualis eſt producto ex 2 in 3, quod fit multiplicando valorem $\frac{14}{7}$, ideſt 2, in valorem $\frac{12}{4}$, ideſt 3.

Similiter ratio cma : a dicitur compoſita ex rationibus cb : b, & mx : x, quia ejus valor $\frac{cma}{a}$, ſeu cm, adæquat productum ex quantitate c (quæ eſt valor rationis cb : b) in quantitatem m, quæ eſt valor rationis mx : x.

Corollarium.

Quapropter rationes compoſitæ ab æqualibus rationibus ſunt æquales inter ſe.

PROPOSITIO DECIMASEXTA.

Theorema.

Datis duabus, aut pluribus rationibus, ſi antecedentes multiplicentur inter ſe, & conſequentes etiam inter ſe, duo producta conſtituent rationem, quæ compoſita erit ex datis rationibus.

Sint rationes datæ a : b, c : m, ſ : t; multiplicando antecedentes inter ſe, & conſequentes pariter inter ſe, fiet ratio acſ : bmt compoſita ex datis rationibus; nimirum cujus valor æqualis erit producto omnium valorum datarum rationum.

Demonſtratio.

Etenim rationum a : b, c : m, ſ : t valores (Defin. 10.) ſunt $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{m}$, $\frac{ſ}{t}$, qui ſi multiplicentur inter ſe, productum erit $\frac{acſ}{bmt}$ (Algeb. 67.): ſed rationis acſ : bmt valor eſt pariter $\frac{acſ}{bmt}$ (Defin. 10.); ergo ratio acſ : bmt, cujus valor adæquat productum valorum datarum rationum a : b, c : m, ſ : t, compoſita erit ex iiſdem rationibus (Defin. 20.). Quod erat demonſtrandum.

Sint rationes 4 : 2, 12 : 3, atque multiplicentur antecedentes 4, & 12 inter ſe, & conſequentes 2, & 3 etiam inter ſe multiplicentur, fiet ratio 48 : 6 compoſita ex datis rationibus 4 : 2, 12 : 3; quia valor $\frac{48}{6}$, ideſt 8, adæquat productum ex 2 in 4, ſcilicet ex valore $\frac{4}{2} = 2$ in valorem $\frac{12}{3} = 4$.

PRO-

PROPOSITIO DECIMASEPTIMA.

Theorema.

Si fuerint quotcunque magnitudines ejuſdem generis, ratio primæ ad ultimam compoſita erit ex omnibus intermediis rationibus, ſcilicet primæ ad ſecundam, ſecundæ ad tertiam, tertiæ ad quartam, &c.

Sint datæ quantitates a, b, c, d, ſ, l, m, ratio a : m compoſita erit ex omnibus intermediis rationibus a : b, b : c, c : d, d : ſ, ſ : l, l : m.

Demonſtratio.

Etenim rationum a : b, b : c, c : d, d : ſ, ſ : l, l : m multiplicentur antecedentes a, b, c, d, ſ, l inter ſe, & conſequentes b, c, d, ſ, l, m etiam inter ſe, producta abcdſl, & bcdſlm conſtituent rationem
abcdſl : bcdſlm, quæ (Prop. anteced.) compoſita erit ex omnibus datis rationibus; ſed eſt abcdſl : bcdſlm : : a : m (*Prop.* 2.), quia productum extremorum abcdſlm adæquat productum abcdſlm mediorum; ergo ratio primæ a ad ultimam m componitur ex omnibus intermediis rationibus a : b, b : c, c : d, &c; Quod erat oſtendendum.

Sint numeri quotcunque 24, 6, 2, 18, 3 &c; ratio primi ad ultimum, nempe 24 : 3, compoſita erit ex omnibus intermediis rationibus 24 : 6, 6 : 2, 2 : 18, 18 : 3, quia valores, ſeu exponentes harum rationum ſunt $\frac{24}{6}$, $\frac{6}{2}$, $\frac{2}{18}$, $\frac{18}{3}$, ideſt 4, 3, $\frac{1}{9}$, & 6; qui ſi inter ſe multiplicentur, productum erit
$4 \times 3 \times \frac{1}{9} \times 6 = \frac{72}{9} = 8$; & valor rationis 24 : 3 eſt pariter $\frac{24}{3}$, ſeu 8; adeoque ratio hæc ex illis componitur (Defin. 20.).

PROPOSITIO DECIMAOCTAVA.

Theorema.

Si fuerint duo ordines quantitatum numero æqualium, ſitque prima ad ſecundam primi ordinis, ut prima ad ſecundam alterius ordinis, & ſecunda ad tertiam primi ordinis, ut ſecunda ad tertiam ſecundi ordinis, & tertia ad quartam primi, ut tertia ad quartam ſecundi, atque ita deinceps; tunc datæ quantitates dicuntur eſſe in ratione ordinata, *& erit prima ad ultimam primi ordinis, ſicut prima ad ultimam ſecundi ordinis; & hoc dicitur argumentari* ex æqualitate ordinata, vel ordinando.

Sint duo ordines quantitatum
a, b, c, m, &c
e, ſ, t, l, &c , ita ut ſit

a : b

a : b :: e : ſ, b : c :: ſ : t, c : m :: t : l, ordinando erit a : m :: e : l.

Demonſtratio.

Ratio primæ ad ultimam primi ordinis, ideſt ratio a : m, compoſita eſt ex omnibus rationibus intermediis a : b, b : c, c : m (Prop. anteced.); Similiter per antecedentem Propoſitionem ratio primæ ad ultimam ſecundi ordinis, ratio nempe e : l compoſita eſt ex omnibus intermediis rationibus e : ſ, ſ : t, t : l; ſed rationes a : b, b : c, c : m ſunt ex hypotheſi æquales rationibus e : ſ, ſ : t, t : l (eſt enim a : b = e : ſ, b : c = ſ : t, c : m = t : l); ergo (Axiom. 4; Coroll. Defin. 20.) ratio a : m compoſita ex primis æqualis erit rationi e : l compoſitæ ex poſtremis rationibus, erit nempe a : m :: e : l. Quod erat demonſtrandum.

In hac Propoſitione continentur Propoſitiones 20, & 22 Libri 5. Euclidis.

Sint numeri in ratione ordinata

36, 4, 12

54, 6, 18

ſit nempe

36 : 4 :: 54 : 6, & 4 : 12 :: 6 : 18, ordinando erit 36 : 12 :: 54 : 18.

PROPOSITIO DECIMANONA.

Theorema.

Si in duobus quantitatum ordinibus fuerit prima ad ſecundam primi ordinis, ut ſecunda ad tertiam alterius ordinis, & ſecunda ad tertiam primi ordinis, ut prima ad ſecundam alterius ordinis; tunc quantitates datæ dicuntur eſſe in ratione perturbata; *atque erit prima ad ultimam primi ordinis, ut prima ad ultimam ſecundi ordinis: Quod dicitur argumentari* ex æqualitate perturbata, vel perturbando.

Sint duo ordines quantitatum

a, b, c

ſ, t, m

ejus conditionis, ut ſit a : b :: t : m, & b : c :: ſ : t, ex æqualitate perturbata, ſeu perturbando erit a : c :: ſ : m.

Demonſtratio.

Habemus ex hypotheſi a : b = t : m, & b : c = ſ : t; ergo productum ex ratione a : b in rationem b : c æquale erit producto ex ratione t : m in rationem ſ : t (Axiom. 4; Coroll. Defin. 20.), nimirum ratio compoſita ex rationibus a : b, b : c, æqualis erit rationi compoſitæ ex rationibus t : m, ſ : t; ſed ratio a : c (Prop. 17.) compoſita eſt ex rationibus a : b, b : c, & ratio ſ : m eſt compoſita ex

ratio-

rationibus f : t, t : m; ergo ratio a : c erit æqualis rationi f : m, erit nempe a : c : : f : m. Quod erat demonſtrandum.

In hac Propoſitione continentur Propoſitiones 21, & 23 Libri 5. Euclidis.

Sint duo ordines numerorum

12, 2, 4 ſitque 12 : 2 : : 30 : 5, & 2 : 4 : : 15 : 30, perturbando erit
15, 30, 5
12 : 4 : : 15 : 5, ut per ſe patet.

PROPOSITIO VICESIMA.

Theorema.

Duæ quælibet fractiones ſunt inter ſe in ratione compoſita ex directa ratione numeratorum, & ex ratione inverſa ſeu reciproca denominatorum. Erit nempe prima fractio ad ſecundam, ut productum ex numeratore primæ in denominatorem ſecundæ, ad productum ex numeratore ſecundæ in denominatorem primæ.

Sint duæ quælibet fractiones

$\frac{a}{c}$, $\frac{b}{m}$, erit

$\frac{a}{c} : \frac{b}{m} : : am : bc.$

Demonſtratio.

Nam multiplicetur primus terminus $\frac{a}{c}$ per quartum bc (Algeb. 68.), productum erit $\frac{abc}{c}$, ideſt ab (Algeb. 36.). Similiter multiplicando ſecundum terminum $\frac{b}{m}$ per am, productum erit $\frac{abm}{m}$, ideſt ab. Ergo (Prop. 2.) quatuor termini $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{m}$, am, bc ſunt proportionales, eſt nempe $\frac{a}{c} : \frac{b}{m} : : am : bc$. Sed ratio am : bc compoſita eſt ex duabus rationibus a : b, & m : c (Prop. 16.), quarum prima a : b eſt ratio directa numeratorum a, & b datarum fractionum $\frac{a}{c}$, & $\frac{b}{m}$; ſecunda vero m : c eſt ratio inverſa rationis denominatorum c, & m (Defin. 13.); ergo fractiones $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{m}$ ſunt inter ſe in ratione compoſita ex directa ratione numeratorum, & reciproca denominatorum. Quod erat demonſtrandum.

Sint fractiones $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{4}$, erit

$\frac{5}{7} : \frac{3}{4} : : 5 \times 4 : 3 \times 7$; nimirum $\frac{5}{7} : \frac{3}{4} : : 20 : 21$; ideoque fractio $\frac{5}{7}$ minor eſt fractione $\frac{3}{4}$.

PRO-

PROPOSITIO VICESIMAPRIMA.

Theorema.

Fractiones, quæ habent eundem denominatorem, ſunt inter ſe in ratione directa numeratorum. Fractiones vero, quæ habent eundem numeratorem ſunt inter ſe in ratione reciproca denominatorum.

Primo ſint fractiones $\frac{a}{m}$, $\frac{b}{m}$ ejuſdem nominis, erit $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} :: a : b$.

Demonſtratio.

Nam multiplicando $\frac{a}{m}$ in b, & $\frac{b}{m}$ in a, producta $\frac{ab}{m}$, & $\frac{ba}{m}$ ſunt æqualia; ergo (Prop. 2.) quatuor prædicti termini ſunt proportionales, eſt nempe $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} :: a : b$; conſequenter prima fractio eſt ad ecundam directe, ut numerator primæ ad numeratorem ſecundæ. Quod erat primum.

Secundo ſint fractiones $\frac{a}{c}$, $\frac{a}{m}$ ejuſdem numeratoris, erit prima fractio ad ſecundam reciproce, ut denominator ſecundæ ad denominatorem primæ, erit nempe
$\frac{a}{c} : \frac{a}{m} :: m : c$.

Demonſtratio.

Etenim multiplicando $\frac{a}{c}$ in c, productum eſt $\frac{ac}{c}$, ideſt a (Algeb. 60.), & multiplicando $\frac{a}{m}$ per m, productum eſt pariter a; ergo (Prop. 2.) quatuor dati termini ſunt proportionales, nimirum eſt $\frac{a}{c} : \frac{a}{m} :: m : c$; adeoque prima fractio ad ſecundam eſt reciproce, ſicuti denominator ſecundæ ad denominatorem primæ. Quod erat oſtendendum.

Corollarium.

Hinc ſi duæ inæquales quantitates a, & b dividantur per eandem quantitatem m, quotientes $\frac{a}{m}$, & $\frac{b}{m}$ erunt inter ſe in ratione integrarum quantitatum a, & b; eſt enim per primam Demonſtrationem $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} :: a : b$; nimirum dimidium cujuſvis quantitatis eſt ad dimidium alterius quantitatis, ut prima quantitas ad ſecundam; vel tertia pars primæ ad tertiam ſecundæ, ut prima quantitas ad ſecundam, atque ita deinceps.

Eſt Propoſitio 15. Libri 5. Euclidis.

LEMMA.

Æquales radices æqualia quadrata, æquales cubos &c. conſtituunt. E converſo quadrata æqualia, cubi æquales &c. habent radices æquales.

Primo ſit a = m, multiplicando hanc æquationem per ſemetipſam, ideſt per a = m, fiet $a^2 = m^2$ (Axiom. 4.). Si autem æquatio $a^2 = m^2$ iterum multiplicetur per a = m, orietur $a^3 = m^3$. Eadem ratione eſt $a^4 = m^4$, $a^5 = m^5$ &c; atque ita deinceps.

Conſequenter æquales poteſtates æqualium radicum ſunt æquales inter ſe.

Secundo ſit $b^2 = c^2$, erit b = c. Nam diſſolvendo æquationem $b^2 = c^2$, erit b : c : : c : b; & componendo (*Prop. 6.*) erit b + c : c : : c + b : b; ſed eſt b + c = c + b (Axiom. 2.); ergo (Coroll. Prop. 4.) erit etiam c = b.

Eadem ratione ſi fuerit $b^3 = c^3$, vel $b^4 = c^4$, &c; erit pariter b = c; nam multiplicando æquationem b = c per ſemetipſam, & multiplicando productum $b^2 = c^2$ per eandem æquationem b = c, reſtituitur $b^3 = c^3$; & multiplicando hanc æquationem per b = c, oritur $b^4 = c^4$, atque ita deinceps.

Similiter ſi fuerit $a^2 b^2 = c^2 m^2$, erit etiam ab = cm, quia quadrando æquationem ab = cm, reſtituitur $a^2 b^2 = c^2 m^2$. Item poſito $a^3 b^3 = c^3 m^3$, erit ab = cm, & e converſo.

PROPOSITIO VIGESIMASECUNDA.

Theorema.

Datis duabus proportionibus, multiplicando, vel dividendo terminos unius per reſpondentes terminos alterius proportionis, producta in primo caſu, & quotientes in ſecundo erunt proportionales.

Sint duæ proportiones
a : b : : c : e, & ſ : m : : r : t, erit aſ : bm : : cr : et, vel etiam erit $\frac{a}{ſ} : \frac{b}{m} : : \frac{c}{r} : \frac{e}{t}$.

Demonſtratio.

Nam ex datis proportionibus a : b : : c : e, & ſ : m : : r : t oriuntur æquationes (Prop. 1.) ae = bc, ſt = mr; & multiplicando primam æquationem per ſecundam, fiet nova æquatio aeſt = bcmr (Axiom. 4.); & diſſolvendo (Coroll. Prop. 2.) erit aſ : bm : : cr : et. Quod erat primum.

Si autem æquatio ae = bc dividatur per æquationem ſt = mr, fiet (Axiom. 5.) $\frac{ae}{ſt} = \frac{bc}{mr}$, ſive

$\frac{a}{ſ}$

$\frac{a}{f} \times \frac{e}{t} = \frac{g}{r} \times \frac{b}{m}$; & diſſolvendo erit
$\frac{a}{f} : \frac{b}{m} :: \frac{c}{r} : \frac{e}{t}$. Quod erat oſtendendum.

Si plures fuerint datæ proportiones, eadem erit ratio.

Corollarium I.

Datis igitur quatuor terminis proportionalibus $a : b :: c : m$, æquales poteſtates eorundem terminorum erunt etiam proportionales; nimirum $a^2 : b^2 :: c^2 : m^2$; item $a^3 : b^3 :: c^3 : m^3$ &c; ſi enim data proportio $a : b :: c : m$ ſcribatur bis, & multiplicentur inter ſe termini reſpondentes, per antecedentem Demonſtrationem fiet $a^2 : b^2 :: c^2 : m^2$; ſi ter ſcribatur, fiet $a^3 : b^3 :: c^3 : m^3$, atque ita deinceps.

Corollarium II.

Similiter æquales radices quatuor terminorum proportionalium erunt etiam proportionales inter ſe; nimirum ſi fuerit $a^2 : b^2 :: c^2 : m^2$, vel $a^3 : b^3 :: c^3 : m^3$, erit pariter $a : b :: c : m$; nam ſi eſt $a^2 : b^2 :: c^2 : m^2$, erit (Prop. 1.) $a^2 m^2 = b^2 c^2$; conſequenter (Algeb. 97.) extrahendo radicem quadratam, per Lemma antecedens erit $am = bc$; & diſſolvendo (Coroll. Prop. 2.) erit $a : b :: c : m$. Eadem ratione ſi fuerit $a^3 : b^3 :: c^3 : m^3$, erit $a^3 m^3 = b^3 c^3$, conſequenter per Lemma præcedens erit $am = bc$; & diſſolvendo erit
$a : b :: c : m$, atque ita de reliquis.

Definitio XXI.

Ratio illa, cujus valor eſt quadratum valoris alterius rationis, dicitur ratio *duplicata*, vel *quadrata* alterius rationis. Si autem valor primæ rationis ſit cubus valoris ſecundæ, tunc prima ratio dicitur *triplicata*, vel *cubica* alterius rationis. Itaque ratio $acc : a$ eſt duplicata, ſeu quadrata rationis $bc : b$, quia cc valor primæ rationis (Algeb. 78.) eſt quadratum valoris c ſecundæ rationis.

Item ratio $18 : 2$ eſt duplicata rationis $21 : 7$, quia valor primæ eſt $\frac{18}{2}$, ſeu 9, quadratum valoris $\frac{21}{7}$, ſeu 3, alterius rationis.

Similiter ratio $ac^3 : a$ eſt triplicata, ſeu cubica rationis $ac : a$, quia valor primæ c^3 eſt cubus valoris c ſecundæ. Item ratio $24 : 3$ eſt triplicata, ſeu cubica rationis $10 : 5$, quia valor primæ 8 eſt cubus valoris ſecundæ, qui eſt 2.

Definitio XXII.

Ratio compoſita ex duabus æqualibus rationibus eſt duplicata, ſeu quadrata utriuſque. Ut ſi ex rationibus æqualibus $am : a$, & $bm : b$

Prop. 16.) fiat compoſita ratio abmm : ab, ratio hæc, cujus valor eſt mm, erit duplicata, ſeu quadrata tam rationis am : a, quam rationis bm : b, quarum valor eſt m. Similiter ratio ex tribus æqualibus rationibus compoſita, triplicata, ſeu cubica erit cujuſvis datarum.

Ex rationibus æqualibus am : a, bm : b, cm : c (Prop. 16.) componatur ratio $abcm^3$: abc, ratio hæc triplicata erit rationis am : a, item rationis bm : b, & rationis cm : c, quia ejus valor m^3 eſt cubus valoris m aliarum rationum.

Si autem ratio componatur ex quatuor æqualibus rationibus, dicatur *quadruplicata*, ſi ex quinque, *quintuplicata* uniuſcujuslibet componentium rationum vocetur, atque ita deinceps.

Definitio XXIII.

Ratio vero, cujus valor eſt radix quadrata valoris alterius rationis, ratio *ſubduplicata*, vel *ſubquadrata* alterius rationis appellatur.

Si autem ejus valor ſit radix cubica valoris alterius rationis, tunc dicatur ratio *ſubtriplicata*, vel *ſubcubica* alterius rationis.

Si valor ſit radix quarta, dicatur ratio *ſubquadruplicata* alterius rationis; atque ita procedendo.

Itaque ratio ac : a eſt ſubduplicata rationis acc : a, quia illius valor c eſt radix quadrata valoris cc hujus rationis.

Item ratio ac : a eſt ſubtriplicata rationis ac^3 : a, quia ejus valor c eſt radix cubica valoris c^3 alterius rationis.

Definitio XXIV.

Data qualibet ratione am : a, ſi quadrentur ejus termini am, & a, quadrata (Algeb. 78.) aamm, & aa conſtituent rationem aamm : aa; quæ duplicata erit rationis am : a. Si autem fiant cubi terminorum am, & a, fiet ratio $a^3 m^3$: a^3 triplicata rationis am : a, ut per ſe patet.

Similiter ratio a^2 : c^2 eſt duplicata rationis a : c; quia ejus valor $\frac{a^2}{c^2}$ eſt quadratum valoris $\frac{a}{c}$.

PROPOSITIO VICESIMATERTIA.

Theorema.

Datis tribus terminis continue proportionalibus, productum extremorum æquale erit quadrato medii termini. Atque ratio primi termini ad tertium duplicata erit rationis primi ad ſecundum, ſive ſecundi ad tertium.

Sit proportio continua ∷ a : b : c. Primo erit ac = bb.

De-

Demonſtratio.

Quoniam ex hypotheſi eſt $\div$ a : b : c, ſive (Defin. 18.) a : b :: b : c, erit ac = bb (Propoſ. 1.). Quod erat primum.

Secundo erit ratio a : c duplicata, ſeu quadrata rationis a : b, vel b : c.

Demonſtratio.

Nam (Propoſ. 17.) ratio a : c compoſita eſt ex rationibus intermediis a : b, b : c; ſed rationes a : b, b : c ſunt æquales ex hypotheſi (eſt enim $\div$ a : b : c); ergo ratio a : c ex illis compoſita, duplicata erit tam rationis a : b, quam rationis b : c (Definit. 22.) Quod erat ſecundum.

Corollarium.

Ergo datis tribus terminis continue proportionalibus $\div$ a : b : c, erit primus a ad tertium c, ut quadratum aa primi ad quadratum bb ſecundi, vel ut bb quadratum ſecundi ad cc quadratum tertii. Nam per primam Demonſtrationem eſt ac = bb; & multiplicando per a (Axiom. 4.), fiet aac = abb; & diſſolvendo erit a : c :: aa : bb. Similiter multiplicando æquationem ac = bb per c, fiet acc = bbc; & diſſolvendo (Coroll. Propoſ. 2.) erit a : c :: bb : cc.

PROPOSITIO VICESIMAQUARTA.

Problema.

Datis duobus terminis tertium proportionalem invenire.

Sint duo dati termini a primus, & b ſecundus, atque inveniendus ſit tertius, ad quem ſecundus *b* eandem rationem habeat, quam habet primus a ad ſecundum *b*.

Reſolutio.

Fiat quadratum ſecundi bb, & dividatur per primum a, quotiens $\frac{bb}{a}$ erit tertius quæſitus.

Demonſtratio.

Tertius quæſitus terminus vocetur x, & erit $\div$ a : b : x; conſequenter per primam partem antecedentis Propoſitionis erit æquatio ax = bb, quæ

quæ dividatur per a (Axiom. 5.), fiet $x = \frac{bb}{a}$; ſed x ſignificat tertium quæſitum terminum; ergo fractio $\frac{bb}{a}$, quæ oſtenſa eſt æqualis quantitati x, erit tertius quæſitus terminus.

Secundo ſi dati ſint primus a, & tertius c, tunc medius terminus erit æqualis radici quadratæ producti ac ex primo in tertium.

Demonſtratio.

Etenim poſito ſecundo quæſito termino = x, erit ÷÷ a : x : c; & per primam partem præcedentis Propoſitionis erit $xx = ac$; atque extrahendo radicem quadratam, invenietur $x = \sqrt{ac}$ (per Lemma Prop. 21.). Quod erat demonſtrandum.

Sit primus terminus 18, tertius 2, ut inveniatur medius terminus, multiplicetur 18 per 2, & ex producto 36 extrahatur radix quadrata (Algeb. 84.), quæ eſt 6, hæc erit medius quæſitus proportionalis; eſt enim ÷÷ 18 : 6 : 2.

PROPOSITIO VICESIMAQUINTA.

Theorema.

In omni progreſſione geometrica, ratio primi termini ad quartum eſt triplicata rationis primi ad ſecundum. Ratio primi ad quintum eſt quadruplicata rationis primi ad ſecundum; atque ita deinceps.

Sit progreſſio geometrica ÷÷ a : b : c : m : f : t &c, erit $a : m :: a^3 : b^3$.

Demonſtratio.

Ratio a : m compoſita eſt ex intermediis rationibus a : b, b : c, c : m (Propoſ. 17.); ſed hæ rationes ſunt ex hypotheſi æquales inter ſe, & ratio compoſita ex tribus æqualibus rationibus eſt triplicata cujuſvis ipſarum (Defin. 22.); ergo ratio a : m eſt triplicata rationis a : b; ſive (Defin. 24.) erit
$a : m :: a^3 : b^3$.

Eodem modo demonſtratur rationem a : f quadruplicatam eſſe rationis a : b; cum ratio a : f (Propoſ. 17.) componatur ex quatuor æqualibus rationibus a : b, b : c, c : m, m : f.

Similiter ratio a : t quintuplicata eſt rationis a : b, & ſic in infinitum procedendo.

Corollarium.

Conſequitur ratio a : b, primi nempe ad ſecundum, eſt ſubdupli-

ratio pli-

plicata rationis a : c primi ad tertium (Defin. 23.), ſubtriplicata rationis a : m, ideſt primi ad quartum; atque ita progrediendo.

PROPOSITIO VICESIMASEXTA.

Theorema.

In omni geometrica progreſſione productum extremorum adæquat productum terminorum ab extremis æque diſtantium, & æquale eſt quadrato termini medii, quando terminorum numerus eſt impar.

Sit geometrica progreſſio
$\div\!\!\div$ $a : ac : ac^2 : ac^3 : ac^4 : ac^5 : ac^6 : ac^7 : ac^8$ &c. erit $a \times ac^8 = ac \times ac^7 = ac^2 \times ac^6 = ac^3 \times ac^5 = ac^4 \times ac^4$, nimirum $= a^2\, c^8$, ut per ſe patet.

PROPOSITIO VICESIMASEPTIMA.

Problema.

Cujuſvis geometricæ progreſſionis omnium terminorum ſummam invenire.

Reſolutio I.

Si progreſſio ſit creſcens, ut $\div\!\!\div$ $a : ac : ac^2 : ac^3$, tunc multiplicetur ſecundus terminus ac per ultimum (in hoc caſu) ac^3, & ex producto $a^2\, c^4$ ſubtrahatur quadratum aa primi termini, reſiduum erit $a^2\, c^4 - a^2$, quod (Algeb. 43.) dividatur per $ac - a$, ideſt per reſiduum, quod oritur ſubtrahendo primum a ex ſecundo ac, quotiens erit $ac^3 + ac^2 + ac + a$, qui, ut patet, eſt ſumma omnium terminorum datæ progreſſionis.

Sit $\div\!\!\div$ $3 : 6 : 12 : 24 : 48$ &c, multiplicetur 6 in 48, & ex producto 288 ſubtrahatur 9 quadratum primi termini 3, atque reſiduum 279 dividatur per $6 - 3$, ideſt per 3, quotiens 93 erit quæſita ſumma omnium terminorum datæ progreſſionis; nimirum erit $93 = 3 + 6 + 12 + 24 + 48$.

Reſolutio II.

Si autem progreſſio ſit decreſcens, ut
$\div\!\!\div$ $ac^6 : ac^5 : ac^4 : ac^3 : ac^2$ &c, tunc ex quadrato $a^2\, c^{12}$ primi termini ſubtrahatur productum $a^2\, c^7$ ex ſecundo ac^5 in ultimum ac^2, & reſiduum $a^2\, c^{12} - a^2\, c^7$ dividatur per $ac^6 - ac^5$, nimirum per differentiam inter primum terminum, & ſecundum, quotiens erit $ac^6 + ac^5 + ac^4 + ac^3 + ac^2$, qui, ut per ſe patet, eſt ſumma omnium terminorum datæ progreſſionis.

Sit

Sit progreſſio decreſcens $\div$ 64 : 32 : 16 : 8 : 4 : 2 : 1, omnium terminorum ſumma erit 127, eſt enim $64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 127$.

Corollarium.

Quapropter datis primo, ſecundo, & ultimo termino cujuſvis geometricæ progreſſionis, inveniri poteſt omnium terminorum ſumma per antecedentes reſolutiones.

Definitio X X V.

Rationes arithmeticæ (Defin. 8.) dicuntur ſimiles, ſeu æquales, quando habent differentias æquales, cum nempè antecedentes æqualiter ſuperant ſuos conſequentes, vel æqualiter a conſequentibus deficiunt. Sic rationes 7 : 3, & 9 : 5 ſunt æquales, quia $7 - 3$ adæquat $9 - 5$. Item rationes $a : a + m$, $c : c + m$ ſunt æquales, quia antecedentes a, & c per eandem quantitatem m a ſuis conſequentibus $a + m$, & $c + m$ deficiunt.

Si autem inter ſe comparentur duæ æquales arithmeticæ rationes, fiet proportio arithmetica. Sic 8 : 6 eſt ut 7 : 5, quæ ſic ſcribitur 8 : 6 ∴ 7 : 5. Item $a : a + m$ ∴ $c : c + m$. Atque dicitur continua, quando ſecundus terminus adæquat tertium.

PROPOSITIO VICESIMAOCTAVA.

Theorema.

In omni proportione Arithmetica, ſumma extremorum adæquat ſummam mediorum.

Demonſtratio.

Nam generaliter data qualibet Arithmetica proportione $a : a + c$ ∴ $b : b + c$, evidens eſt $a + b + c$ extremorum, æqualem eſſe ſummæ $a + c + b$ mediorum.

Similiter data proportione $a : a - m$ ∴ $b : b - m$, ſemper erit $a + b - m = a - m + b$.

Sit 5 : 8 ∴ 4 : 7, erit $5 + 7 = 8 + 4$. Item ſit 2 : 7 ∴ 4 : 9, erit $2 + 9 = 7 + 4$.

Si autem proportio fuerit continua, ut $\div$ $a : a + m : a + 2m$, ſumma $a + a + 2m$, ideſt $2a + 2m$ extremorum, erit dupla termini medii $a + m$, ut evidens eſt.

Sit $\div$ 8 : 11 : 14, erit ſumma $8 + 14$ dupla termini medii 11.

PRO-

PROPOSITIO VICESIMANONA.

Problema.

Datis tribus Arithmeticæ proportionis terminis, quartum invenire.

Reſolutio.

Sint tres dati termini a, a + m, b, ut inveniatur quartus Arithmetice proportionalis, fiat ſumma a + m + b ſecundi cum tertio, ex qua ſubtrahatur primus terminus a, reſiduum a + m + b — a, ideſt m + b erit quartus quæſitus terminus proportionalis: eſt enim a : a + m ∴ b : b + m, ut per ſe patet.

Scholion.

In omni Arithmetica proportione termini ſunt pariter proportionales alternando, & invertendo, non autem componendo, dividendo, vel convertendo.

PROPOSITIO TRIGESIMA.

Theorema.

In omni Arithmetica progreſſione ÷ a : a + m : a + 2 m : a + 3 m : a + 4 m, ſumma extremorum 2 a + 4 m adæquat ſummam duorum quorumlibet terminorum a + m, & a + 3 m ab extremis æque diſtantium, & dupla eſt termini medii a + 2 m, ut evidens eſt.

Sit ÷ 1 : 3 : 5 : 7 : 9 : 11 : 13 &c; erit 1 + 13 = 3 + 11 = 5 + 9 = 7 × 2.

Item in progreſſione decreſcente
÷ 7 : 5 : 3 : 1 : — 1 : — 3 &c; erit ſumma 7 — 3 = 5 — 1 = 3 + 1, ut evidens eſt.

Corollarium.

Hinc cognitis primo, & ultimo Arithmeticæ progreſſionis terminis, & cognito etiam terminorum numero, invenietur ſumma omnium terminorum, ſi dimidium ſummæ primi, & ultimi multiplicetur per terminorum numerum, quando terminorum numerus eſt impar.

Si autem terminorum numerus ſit par, tunc dimidium numeri terminorum multiplicetur per ſummam primi, & ultimi. Sic data progreſſione
÷ a : a + m : a + 2 m : a + 3 m : a + 4 m &c, ut habeatur om-

omnium terminorum ſumma, addantur primus a, & ultimus $a + 4m$, fiet ſumma $2a + 4m$, cujus dimidium $a + 2m$ multiplicetur per terminorum numerum, qui eſt 5; productum $5a + 10m$ erit quæſita ſumma omnium terminorum, ut per ſe patet.

Si data progreſſio ſit
$\div a : a + m : a + 2m : a + 3m : a + 4m : a + 5m$, cujus terminorum numerus 6 eſt par; tunc ſumma $2a + 5m$ primi, & ultimi multiplicetur per 3 dimidium numeri terminorum, & productum $6a + 15m$ erit omnium terminorum ſumma.

Similiter ſi progreſſionis
$\div 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8 : 9 : 10 : 11 : 12 : 13 : 14 : 15$ fiat ſumma 16 primi cum ultimo, & hujus dimidium 8 multiplicetur per numerum terminorum 15, productum 120 erit quæſita ſumma omnium terminorum.

Eadem ratione data progreſſione
$\div 2 : 5 : 8 : 11 : 14 : 17 : 20 : 23$, ſi ſumma 25 primi cum ultimo multiplicetur per 4 dimidium numeri terminorum, productum 100 erit quæſita ſumma omnium terminorum datæ progreſſionis.

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER SECUNDUS.

GEometria quantitatem continuam, ſive extenſionem veluti objectum conſiderat, ejuſque partes, munera, & proprietates omnes contemplatur. Cum autem continua quantitas extendatur vel in longum, vel in longum ſimul, & latum, vel in longum, latum, atque profundum; hinc tria eſſe continuæ quantitatis genera colligitur, quæ ſunt linea, ſuperficies, & corpus: corpus enim trinam habet dimenſionem, longitudinem nempe, latitudinem, & profunditatem, ſeu altitudinem. Quod ſi omnem altitudinem, ſeu craſſitudinem a corpore ablatam eſſe concipiamus, remanebit extenſio in longum, & latum, quæ ſuperficies appellatur. Si autem a ſuperficie omnis latitudo auferatur, relinquetur ſimplex longitudo, quæ linea vocatur; ſi vero a linea omnem longitudinem auferri concipiamus, nihil remanebit præter ſignum, ſeu extremum lineæ, quod punctum nuncupatur. Atque ea Geometriæ pars, in qua linearum, & ſuperficierum proprietates, munera, & accidentia conſiderantur, atque explanantur, *Geometria Plana* vocatur: illa vero pars, in qua ſolidorum, ſeu corporum proprietates demonſtrantur, *Geometria Solida*, vel *Stereometria* appellatur.

Univerſam proportionum doctrinam uberius illuſtratam, atque brevius diſpoſitam in præcedenti Libro Primo demonſtravimus: in hoc autem Secundo, & in ſubſequentibus Libris Tertio, Quarto, & Quinto de Geometria Plana diſſeremus. Sextus vero Liber Solidorum, ſeu corporum proprietates, & dimenſiones exhibebit.

Definitio I.

Corpus, vel *Solidum* dicitur quantitas illa, quæ habet trinam dimenſionem, ſcilicet longitudinem, latitudinem, & profunditatem, ſeu altitudinem. Fig. I. Tab. I.

Definitio II.

Superficies eſt quantitas, quæ habet longitudinem, & latitudinem ſine profunditate; eſt nempe extremum corporis extenſum in longum, & latum ſine ulla craſſitudine. Fig. II. Tab. I.

Definitio III.

Linea eſt quantitas, quæ habet longitudinem tantum ſine latitudine, & ſine craſſitudine; ſive eſt extremum ſuperficiei extenſum in longum ſine latitudine. Fig. III. Tab. I.

Definitio IV.

Fig. IV. Tab. I. *Punctum Geometricum* eſt ſignum in quantitate continua, quod a mente noſtra concipitur ſine ulla extenſione; eſt nempe extremum, ſeu terminus lineæ, ſine extenſione; ſive eſt ſignum ſectionis lineæ in duas partes.

Scholium.

Lineæ generari intelligitur ex fluxu puncti, ſuperficies ex fluxu lineæ, & corpus ex fluxu ſuperficiei.

Definitio V.

Fig. V. & VI. Tab. I. *Linea recta* eſt breviſſima omnium linearum, quæ ab uno ad aliud punctum duci poſſunt.

Linea vero *curva* dicitur illa, quæ non eſt breviſſima omnium linearum, quæ a puncto ad punctum duci poſſunt.

Corollarium.

Ergo unica recta linea ab uno ad aliud punctum duci poteſt; ſcilicet inter duo data puncta, duæ, vel plures lineæ rectæ duci nequeunt. Conſequenter ſi termini unius rectæ lineæ poſiti fuerint ſupra terminos alterius rectæ lineæ, neceſſario illæ duæ rectæ lineæ æquales erunt, & una ſuper alteram perfecte cadet, ideſt congruet.

Definitio VI.

Fig. VII. Tab. I. *Superficies plana*, ſive *Planum*, eſt, cujus omnibus partibus linea recta accomodari poteſt.

Superficies autem illa, ſupra quam quaquaverſus aptari nequit linea recta, *ſuperficies curva* appellatur; quæ dicitur *ſuperficies convexa*, quando eſt ſuperficies externa corporis rotundi. Interna vero corporis rotundi ſuperficies *concava* nuncupatur.

Definitio VII.

Fig. VIII. Tab. I. *Angulus planus* eſt inclinatio duarum linearum in eodem plano ſe mutuo tangentium, & non in directum jacentium.

Punctum concurſus linearum, in quo fit angulus, *anguli vertex* appellatur; & lineæ angulum conſtituentes dicuntur *latera*, vel *crura* ejuſdem *anguli*.

Angulus planus rectilineus dicitur ille, qui efficitur a duabus rectis lineis.

Curvilineus vocatur *angulus*, quando continetur a duabus lineis curvis.

Mixti-

Mixtilineus, appellatur *angulus* ab una linea recta, & altera curva.

Quapropter linearum rectarum AB, AC, ſe mutuo tangentium in puncto A, alterius ad alteram inclinatio, eſt angulus planus rectilineus. Fig. IX. Tab. I.

Inclinatio curvarum FE, LE, in puncto E ſe invicem tangentium, eſt angulus curvilineus. Fig. X. Tab. I.

Angulus vero conſtitutus a recta BM, & a curva BC, eſt mixtilineus. Fig. XI. Tab. I.

Quilibet angulus planus tribus Alphabeti litteris deſignatur, quarum media anguli verticem denotat; ut angulus contentus a lineis AB, AC, vocatur angulus CAB, vel BAC. Fig. IX. Tab. I.

Unica littera prope verticem anguli poſita etiam indicatur angulus planus, quando duæ tantum lineæ ad idem punctum concurrunt. Sic dictus angulus CAB, etiam appellatur angulus A.

Præterea angulus planus etiam deſignatur a parva littera poſita in vertice anguli inter duo latera ejuſdem anguli. Ut angulus ACL contentus a lineis AC, & LC, indicatur a littera x; & angulus BCA deſignatur a littera m. Fig. XII. Tab. I.

Corollarium.

Quoniam angulus planus in ſola linearum ſe mutuo tangentium inclinatione conſiſtit, ideo major vel minor linearum longitudo angulum non auget, nec minuit. Sic angulus CAB non mutatur, quamvis latera AB, AC verſus B, & C indefinite producantur. Fig. XIII. Tab. I.

Definitio VIII.

Recta linea ſuper aliam rectam inſiſtens duos efficit angulos, qui vocantur *anguli deinceps poſiti*, vel *anguli conſequentes*, quales ſunt duo anguli m, & x, vel duo ABC, ABL. Fig. XIV. Tab. I.

Definitio IX.

Cum recta linea (AB) ſuper aliam rectam (CL) incidens, non magis verſus unam, quam verſus alteram partem inclinatur, & ideo anguli conſequentes (ABC, ABL) ſunt æquales, tunc uterque æqualium angulorum vocatur *rectus*, & recta (AB) alteri (CL) inſiſtens dicitur *linea perpendicularis*, vel *normalis*, aut *perpendiculum*. Fig. XV. Tab. I.

Corollarium.

Ergo ad rectam CL, & ex puncto in ea B unica recta perpendicularis BA duci poteſt, quia in unica poſitione BA linea non magis inclinatur verſus unam, quam verſus alteram partem.

Definitio X.

Quando recta linea (AC) ſuper aliam rectam (BL) conſiſtens, Fig. XVI. Tab. I.

ma-

magis verſus unam, quam verſus alteram partem inclinatur, ac proinde efficit angulos conſequentes (m, & x) inæquales, ipſa recta (AC) alteri (BL) inſiſtens dicitur *linea obliqua*; & inæqualium angulorum ille (ACB, ſeu m), qui major eſt recto, *angulus obtuſus* vocatur; qui vero (ACL, ſeu x) minor eſt recto, dicitur *angulus acutus*.

Corollarium.

Conſequenter angulus rectus ille eſt, cui ex altera parte æqualis angulus conſequens efficitur, ſi unum latus producatur.

Angulus obtuſus eſt ille, cujus unum latus productum conſtituit angulum conſequentem ipſo minorem.

Acutus vero angulus eſt, cujus unum latus ex altera parte productum efficit angulum conſequentem ipſo majorem.

Definitio XI.

Lineæ *parallelæ*, ſeu *æquidiſtantes* dicuntur, quæ in eodem plano exiſtentes eandem ſemper inter ſe diſtantiam ſervant; unde quamvis utrinque in indefinitum producantur, nunquam tamen convenient.

Fig. XVII. Tab. I. Ut ſi recta terminata AB perpendiculariter moveri, ſeu fluere concipiatur ſupra CL, ejus punctum extremum A deſcribet lineam AAM parallelam, ſive æquidiſtantem rectæ CL.

Conſequenter quando lineæ perpendiculares inter duas lineas interpoſitæ æquales ſunt inter ſe, tunc illæ duæ rectæ ſunt parallelæ, ſeu æquidiſtantes.

Atque viciſſim quando duæ lineæ ſunt parallelæ, perpendiculares inter ipſas interceptæ æquales erunt inter ſe.

Definitio XII.

Fig. X III. Tab. I. *Figura* eſt ſpatium ab uno, vel pluribus terminis undique clauſum.

Definitio XIII.

Fig. XIX. Tab. I. *Figura plana* eſt ſuperficies plana, quæ ab unica, vel a pluribus lineis undique terminatur.

Fig. XX. Tab. I. *Rectilinea* dicitur *figura plana*, quæ a lineis rectis undique clauditur.

Fig. XXI. Tab. I. *Figura plana curvilinea* eſt illa, quæ a lineis curvis terminatur.

Fig. I. Tab. II. *Mixtilinea* vero appellatur *figura plana*, quæ partim a lineis curvis, partim a lineis rectis circumſcribitur.

Latera figuræ planæ ſunt lineæ, quæ figuram terminant, atque claudunt.

Omnes vero lineæ, quæ figuram terminant, ſimul ſumptæ, dicuntur *Perimetros*, vel *Circuitus* ejuſdem figuræ.

Con-

Corollarium.

Ergo duæ rectæ lineæ figuram conſtituere nequeunt, quia ſpatium undique claudere non poſſunt.

Definitio XIV.

Figura ſolida eſt ſpatium ab unica, vel a pluribus ſuperficiebus undique terminatum.

Scholium.

Geometriæ pars illa, in qua de figuris planis, de lineis, & angulis in plano deſcriptis agitur, *Geometria Plana* appellatur.

Definitio XV.

Circulus eſt figura plana curvilinea ab unica linea curva terminata, cujus ſingula puncta æqualiter diſtant a puncto medio.

Ut ſi quælibet recta linea (AC) circa alterutrum ejus extremum (C) fixum, & immobile tamdiu revolvi concipiatur in plano (ex A per B, D, E, F), donec ad idem punctum (A), ſive ad eandem poſitionem (AC), ex qua diſceſſerat, revertatur. Fig. II. Tab. II.

Figura plana curvilinea (ABDEFGL) ex ſitu ejuſdem rectæ (AC) deſcripta, *Circulus* appellatur.

Linea curva (ABDEFGLA) ab altero circumductæ rectæ extremo (A) deſcripta, *Circumferentia* dicitur, vel *Peripheria*, vel *Perimetros circuli*; ſive etiam vocatur *Linea rotundationis*, aut *Linea circinationis*.

Circumferentiæ partes (ut ABD, EF, ALG) *Arcus circuli* dicuntur.

Punctum medium (C) appellatur *Centrum circuli*.

Omnes rectæ lineæ (CA, CB, CD, &c.) a circuli centro, & a peripheria terminatæ, vocantur *Radii*, vel *Semidiametri* ejuſdem circuli, qui omnes ſunt inter ſe æquales, ut evidens eſt.

Definitio XVI.

Circuli *Diameter*, vel *Dimetiens*, dicitur quælibet recta per centrum circuli tranſiens, & utrinque ad peripheriam terminata, ut AB, quæ circulum bifariam, hoc eſt in duas partes æquales dividit, quæ *Semicirculi* vocantur. Conſequenter *Semicirculus* eſt figura plana mixtilinea terminata a diametro, & a dimidia circuli peripheria, ut ABF, vel ABM. Fig. III. Tab. II.

Definitio XVII.

Circuli chorda, vel *ſubtenſa*, vocatur quælibet recta utrinque ad pe-

riphe-

Fig. IV. Tab. II. ripheriam terminata, quæ per centrum circuli non tranſit, ut AM; atque circulum dividit in duas inæquales partes, quæ dicuntur *circuli ſegmenta*, vel *portiones*.

Unde *ſegmentum*, vel *portio circuli*, eſt figura plana mixtilinea comprehenſa a circuli arcu, & a chorda.

Atque *ſegmentum majus* dicitur illud (ABM), in quo reperitur centrum circuli; alterum vero (APEM) vocatur *ſegmentum minus*.

Definitio XVIII.

Figura trilatera rectilinea, ſeu Triangulum rectilineum, eſt figura plana rectilinea a tribus lateribus terminata, cujus ſpecies ratione laterum ſunt tres; nimirum

Fig. V. Tab. II.

Definitio XIX.

Fig. VI. Tab. II. *Triangulum Æquilaterum*, quod habet omnia latera æqualia.

Definitio XX.

Fig. VII. Tab. II. *Triangulum Iſoſceles, vel Æquicrure*, quod duo tantum latera æqualia habet.

Definitio XXI.

Fig. VIII. Tab. II. *Triangulum Scalenum*, quod habet omnia latera inæqualia.

Scholium.

Triangulorum ſpecies ratione angulorum ſunt pariter tres, quia, ut demonſtravimus, vel omnes tres anguli ſunt acuti, vel unus eſt rectus, aut obtuſus, & reliqui duo acuti. Unde

Definitio XXII.

Fig. IX. Tab. II. *Triangulum rectangulum, vel orthogonium* eſt, quod habet unum angulum rectum.

Definitio XXIII.

Fig. X. Tab. II. *Triangulum obtuſangulum, vel ambligonium* dicitur, quod habet unum angulum obtuſum.

Definitio XXIV.

Fig. XI. Tab. II. *Triangulum* vero *acutangulum*, vel *oxigonium* habet omnes angulos acutos.

Definitio XXV.

In quolibet triangulo rectangulo latus oppoſitum angulo recto vocatur *Hypothenuſa*; & reliqua duo latera angulum rectum conſtituentia *Catheti* appellantur.

De-

Scholium.

In quovis triangulo rectilineo ſeptem conſideranda occurrunt, hoc eſt tria latera, tres anguli, & ipſum triangulum, videlicet ſuperficies plana a tribus lateribus undique terminata.

Præterea nominatis duobus trianguli lateribus, reliquum latus vocatur *Baſis* ejuſdem trianguli; & baſis trianguli iſoſcelis eſt latus inæquale.

Definitio XXVI.

Figura plana rectilinea a quatuor rectis lineis undique terminata vocatur *Figura Quadrilatera, vel Figura Quadrangularis*, quia habet pariter quatuor angulos. Fig. XIII. Tab. II.

Definitio XXVII.

Parallelogrammum eſt figura quadrilatera, cujus bina oppoſita latera ſunt parallela; atque dicitur *rectangulum*, quando ejus quatuor anguli ſunt recti. Fig. XII. XIII. XIV. & XV. Tab. II.

Obliquangulum vero dicitur parallelogrammum, quando habet angulos obliquos.

Præterea vocatur *æquilaterum*, quando habet omnia quatuor latera æqualia inter ſe.

Definitio XXVIII.

Quadratum eſt parallelogrammum æquilaterum, & rectangulum. Fig. XII. Tab. II.

Definitio XXIX.

Rhombus eſt parallelogrammum æquilaterum, & obliquangulum. Fig. XV. Tab. II.

Definitio XXX.

Figura altera parte longior, quæ etiam *rectangulum*, vel *oblongum* dicitur, eſt parallelogrammum rectangulum, & non æquilaterum; ſed habet bina oppoſita latera æqualia. Fig. XVI. Tab. II.

Definitio XXXI.

Rhomboides eſt parallelogrammum obliquangulum, & non æquilaterum; habet autem bina latera oppoſita æqualia inter ſe. Fig. XVII. Tab. II.

Definitio XXXII.

Trapezium, vel *Menſula* dicitur omnis alia figura quadrilatera, quæ parallelogrammum non eſt. Fig. XVIII. Tab. II.

Definitio XXXIII.

Figuræ planæ rectilineæ, quæ a pluribus, quam quatuor lateribus undique terminantur, *multilateræ*, vel *multangulæ*, vel *polygoniæ* figuræ vocantur.

Atque *polygonum* a quinque lateribus comprehenſum vocatur *Pentagonum*; a ſex *Hexagonum*; a ſeptem *Heptagonum*; ab octo *Octogonum*; a novem *Enneagonum* &c; atque ita de reliquis figuris multilateris, quæ ſemper nomen deſumunt a numero laterum, vel ab æquali numero angulorum.

Fig. XIX. Tab. II.

Definitio XXXIV.

Fig. XX. Tab. II. *Linea diagonalis* cujuſvis figuræ eſt recta linea intra figuram ducta a quolibet angulo ad alium angulum oppoſitum, quæ linea in parallelogrammo vocatur *Diameter* parallelogrammi.

Definitio XXXV.

Fig. XXI. Tab. II. *Area* cujuſvis *figuræ planæ* eſt ſuperficies, ſive ſpatium a perimetro ejuſdem figuræ undique clauſum. Ut area trianguli eſt ſuperficies terminata a tribus lateribus ejuſdem trianguli. Area circuli eſt ſpatium a peripheria ejuſdem circuli comprehenſum. Et ſic de cæteris.

Definitio XXXVI.

Fig. XXII. Tab. II. Si quælibet recta terminata AC perpendiculariter moveri, ſeu fluere concipiatur ſupra rectam terminatam AB, & in omni poſitione AC, EF, GH, &c. ſui veſtigium relinquere, donec veniat ad poſitionem BL, tunc recta AC deſcribet rectangulum ABCL.

Fig. XXII. Tab. II. Idem rectangulum AL obtinetur, ſi recta AB perpendiculariter fluere concipiatur ſupra totam AC, & in omni poſitione ſui veſtigium relinquere. Unde rectangulum AL componi intelligitur ex totidem lineis æqualibus rectæ AC, quot ſunt elementa, ſeu puncta conſtituentia rectam AB; ſive, quod idem eſt, rectangulum AL concipitur ex totidem lineis æqualibus rectæ AB componi, quot ſunt elementa, ſeu puncta conſtituentia rectam AC.

Fig. XXII. Tab. II. Hinc quodlibet *rectangulum* AL *fieri*, ſeu *contineri* dicitur a duobus lateribus contiguis AB, AC. Atque latus AB dicitur *Baſis*, & perpendiculum AC vocatur *Altitudo* ejuſdem *rectanguli*.

Fig. I. Tab. III. Quapropter area cujuſvis rectanguli, ABCF, invenietur multiplicando baſim AB in altitudinem BC. Etenim ſi baſis AB fuerit unciarum, ſeu digitorum quatuor longitudinis, & altitudo BC trium, multiplicando 4 in 3, productum 12 exhibebit aream, ſeu ſuperficiem dati rectanguli AC.

Fig. II. Tab. III. Si autem baſis cujuſcumque rectanguli vocetur b, & altitudo vo-

O cetur

cetur m, tunc productum bm ſignificabit aream ejuſdem rectanguli.

Cum vero baſis AB eſt æqualis altitudini AC, tunc rectangulum AF ab ipſis contentum vocatur quadratum lineæ AB, vel lineæ AC. Atque ſi baſis AB fuerit quinque unciarum longitudinis, etiam altitudo AC continebit quinque uncias longitudinis; & productum ex 5 in 5, hoc eſt 25, exprimet aream ipſius quadrati. Fig. III. Tab. III.

Si quadrati baſis AB vocetur a, æqualis altitudo AC erit pariter a, & productum aa, vel a^2, indicabit aream quadrati ex linea AB, vel AC.

Corollarium.

Linea igitur per aliam lineam multiplicata non producit lineam, ſed ſuperficiem. Ut multiplicando lineam AB unciarum quatuor per lineam BC trium unciarum longitudinis, productum quidem eſt 12, ſed non ſunt duodecim unciæ longitudinis; ſunt enim, ut apparet, duodecim ſuperficies quadratæ, quarum qualibet habet unam unciam longitudinis, & unciam alteram latitudinis; atque hujuſmodi parva ſuperficies quadrata appellatur *uncia quadrata*. Fig. IV. Tab. III.

Quapropter *menſuræ* aliæ ſunt *lineares*, quibus locorum diſtantias dimetimur; aliæ vero dicuntur menſuræ *ſuperficiales*, quibus ſuperficies omnes dimetiuntur.

Definitio XXXVII.

Rectangulum ABCF contentum a lineis AB, AC, ita indicatur AB×AC. Fig. V. Tab. III.

Quadratum vero rectæ AB ſic indicatur $\overline{AB}^2$.

Præterea ſi linea E fuerit æqualis lateri AB rectanguli ABCF, & linea G æqualis fuerit lateri AC, tunc rectangulum AF etiam contineri dicitur a rectis E, & G.

Similiter ſi recta L fuerit æqualis lateri AB quadrati ACFB, tunc idem quadratum appellabitur etiam quadratum rectæ L. Fig. III. Tab. III.

Definitio XXXVIII.

Altitudo cujuslibet *figuræ rectilineæ* eſt perpendicularis ad baſim ducta ex vertice, vel ex latere baſi oppoſito, ut AM. Fig. VI. Tab. III.

Poſtulatum I.

Ex dato puncto ad aliud punctum rectam lineam ducere.

Poſtulatum II.

Datam rectam lineam terminatam in directum, & indefinite producere.

Poſtulatum III.

Dato centro, & intervallo, ſeu radio circulum deſcribere.

Scholium.

Axiomatis ſeptem jam traditis in Algebra numeris 52, 53, 54, &c. adjungenda ſunt quæ ſequuntur.

Axioma VIII.

Quæ mutuo ſuperimpoſita congruunt, ſunt æqualia inter ſe.

Fig. VII. Tab. III. Ut ſi circulus A ſuperimponatur circulo B, & poſito centro circuli A ſupra centrum circuli B, circumferentia circuli A perfecte cadat ſupra circumferentiam circuli B; tunc duo circuli mutuo congruent, atque erunt æquales inter ſe, ut per ſe patet.

Similiter omnes circuli habentes radios æquales ſi mutuo ſuperimponantur, congruent, & æquales erunt, ut ex ipſa circuli definitione patet.

Præterea omnes rectæ lineæ æquales mutuo ſuperimpoſitæ congruunt.

Item omnes anguli rectilinei æquales, ſi mutuo ſuperimponantur, congruere debent, ut ex Definitionibus 5, & 7 immediate deducitur.

Axioma IX.

Totum eſt ſua parte majus.

Sic recta AB major eſt qualibet parte AC, vel CD, vel DB, &c.

Axioma X.

Omne totum æquale eſt omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis.

Sic tota recta AB adæquat omnes partes AC, CD, DB ſimul ſumptas; nimirum eſt $AB = AC + CD + DB$.

Axioma XI.

Si inæqualibus æqualia addas, quæ fiunt, ſunt inæqualia.

Axioma XII.

Si ab inæqualibus æqualia demas, quæ remanent, ſunt inæqualia.

Axioma XIII.

Quæ ejuſdem, vel æqualium ſunt dupla, tripla, vel quadrupla, &c. ſunt æqualia inter ſe.

Axio-

Axioma XIV.

Quæ ſunt dimidium, vel tertia pars, vel quarta &c. ejuſdem, vel æqualium, ſunt pariter æqualia inter ſe.

Axioma XV.

Si fuerit totum duplum totius, & ablatum duplum ablati, etiam reliquum reliqui duplum erit.

Sit numerus 24 duplus numeri 12, & ex toto 24 auferatur numerus 10 duplus numeri 5, qui auferatur ex toto 12; etiam reliquum 24 — 10 duplum erit reſidui 12 — 5; ideſt reſiduum 14 duplum erit reſidui 7. Fig. VIII. Tab. III.

Axioma XVI.

Omnes anguli recti ſunt æquales inter ſe.

Sint rectæ AB, LG perpendiculares ad rectas CD, EF; anguli recti in B æquales erunt angulis rectis in G. Nam ſi recta CD ſuperimponatur rectæ EF, ita ut punctum B cadat ſupra punctum G, tunc perpendicularis BA neceſſario coincidet cum perpendiculari GL; alioquin ſi hinc, vel inde a perpendiculari GL deflecteret, eſſet obliqua: *quod eſt contra hypotheſim*; conſequenter (Axiom. 14.) anguli recti in B ſunt æquales angulis rectis in G, quia congruunt. Fig. IX. Tab. III.

Axioma XVII.

Duo latera cujuſvis trianguli rectilinei ſimul ſumpta, reliquo ſunt majora.

Ut in triangulo ABC, evidens eſt duo qualibet latera, exempli cauſſa, AB, BC, ſimul ſumpta, majora, ſeu longiora eſſe reliquo latere AC. Quod ab Euclide demonſtratur in Propoſitione 20. Libri I. Fig. X. Tab. III.

Axioma XVIII.

Si ab extremis (A, & C) unius lateris (AC) cujuſvis trianguli rectilinei (ABC) ad punctum aliquod (D) intra ipſum triangulum ducantur duæ rectæ lineæ (AD, CD); ipſæ ſimul ſumptæ minores erunt reliquis duobus dati trianguli lateribus (AB, CB) ſimul ſumptis. Nimirum ſemita ex A per D ad C minor eſt, quam ſemita ex A per B ad C.

Eſt prima pars Propoſitionis 21. Libri 1. Euclidis.

PRO-

PROPOSITIO PRIMA.

Problema.

Super data recta linea terminata triangulum æquilaterum deſcribere.

Fig. XII. Tab. III. Data ſit recta AC terminata a punctis A, & C, & ſupra eandem rectam conſtituendum ſit triangulum æquilaterum.

Conſtructio.

Ex centro A, & intervallo, ſeu radio AC (Poſt. 3.) deſcribatur circulus CDF. Similiter ex centro C, & intervallo eodem CA deſcribatur alius circulus ADE, cujus peripheria alicubi ſecabit peripheriam alterius circuli, ut in puncto D, ex quo ad puncta A, & C ducantur duæ rectæ lineæ DA, DC (Poſt. 1.). Dico triangulum ADC eſſe æquilaterum.

Demonſtratio.

Rectæ lineæ AD, AC ſunt radii ejuſdem circuli DFC; *ideoque* (Defin. 15.) eſt AD = AC. Similiter eſt CD = CA, quia ſunt radii ejuſdem circuli ADE; ergo (Axiom. 1.) erit AD = DC, quia ambæ oſtenſæ ſunt æquales eidem rectæ AC. Itaque tres rectæ AD, AC, CD erunt æquales inter ſe; conſequenter (Defin. 19.) triangulum ADC erit æquilaterum. Ergo ſuper data recta terminata conſtitutum eſt triangulum æquilaterum. Quod erat faciendum, & demonſtrandum.

Eſt Propoſitio 1. Libri 1. Euclidis.

PROPOSITIO SECUNDA.

Problema.

Ex dato puncto rectam lineam ducere æqualem datæ rectæ terminatæ.

Fig. XIII. Tab. III. Data ſit recta terminata AB, & datum ſit punctum D, ex quo ducenda ſit linea recta æqualis datæ AB.

Conſtructio.

Centro A, intervallo AB (Poſt. 3.) deſcribatur circulus BFE; deinde a puncto D ad punctum A (Poſt. 1.) ducatur recta DA. Super recta DA (Prop. anteced.) conſtruatur triangulum æquilaterum ACD, cujus latus CA (Poſt. 2.) producatur uſque ad periferiam in

F; po-

F; poſtea centro C intervallo CF (Poſt. 3.) deſcribatur alius circulus FGL; tandem producatur latus CD uſque ad peripheriam circuli in L, erit DL quæſita linea.

Demonſtratio.

Triangulum CDA, per conſtructionem, eſt æquilaterum; igitur (Defin. 19.) erit latus CD = CA. Præterea (Defin. 15.) eſt radius CL = CF, quia, ex conſtructione, ſunt radii majoris circuli FGL. Itaque ab æqualibus lineis CL, CF auferantur partes æquales CD, CA, & (Axiom. 3.) permanebit DL = AF. Atqui (Defin. 15.) eſt pariter AB = AF (ſunt enim radii circuli minoris FBE); ergo (Axiom. 1.) erit DL = AB. Quapropter ex dato puncto ducta eſt recta linea æqualis datæ rectæ terminatæ. Quod erat faciendum, & demonſtrandum.

Eſt Propoſitio 11. Libri 1. Euclidis.

PROPOSITIO TERTIA.

Problema.

Datis duabus rectis lineis inæqualibus, ex majori partem abſcindere æqualem minori.

Datæ ſint duæ rectæ inæquales, AB major, & CD minor, atque ex majori AB auferenda ſit pars æqualis minori CD. Fig. XIV. Tab. III

Conſtructio.

Ab extremo puncto A majoris AB (Prop. anteced.) ducatur recta AE æqualis minori CD. Deinde centro A, & radio AE (Poſt. 3.) deſcribatur circulus EFG, cujus peripheria alicubi ſecabit lineam AB (quia hæc major eſt CD, ſeu radio AE), ut in puncto F. Dico AF eſſe quæſitam portionem æqualem minori CD.

Demonſtratio.

Omnes radii ejuſdem circuli (Defin. 15.) ſunt æquales inter ſe; iccirco erit radius AF = AE; ſed per conſtructionem eſt AE = CD; ergo (Axiom. 1.) erit AF = CD. Conſequenter ex data recta majore abſciſſa eſt portio æqualis datæ rectæ minori. Quod erat propoſitum.

Eſt Propoſitio 3. Libri 1. Euclidis.

PROPOSITIO QUARTA.

Problema.

Datis tribus lineis terminatis, quarum duæ, quomodocunque ſumptæ, reliquam excedant, ſuper ipſarum unam triangulum conſtituere habens duo latera reliquis duabus datis rectis lineis æqualia.

Fig. I. Tab. IV. Datæ ſint tres rectæ lineæ GH, A, & C, quarum duæ omnifariam ſumptæ reliqua ſint majores (Axiom. 17.), atque ſupra GH deſcribendum ſit triangulum, cujus reliqua duo latera ſint æqualia lineis A, & C, ſingula ſingulis.

Conſtructio.

Recta terminata GH (Poſt. 2.) utrinque producatur verſus E, & F indefinite; deinde (Prop. anteced.) ſecentur partes GE æqualis lineæ A, & HF = C. Poſtea centro G intervallo GE (Poſt. 3.) deſcribatur circulus ELM, & centro H radio HF deſcribatur *alius* circulus LFK. Tandem ex puncto L, in quo peripheriæ ſe *mutuo* ſecant, ad puncta G, & H (Poſt. 1.) ducantur rectæ LG, LH; erit LGH quæſitum triangulum.

Demonſtratio.

Latus GL (Defin. 15.) eſt æquale rectæ GE; ſed recta GE (Conſtr.) eſt æqualis rectæ A; ergo (Axiom. 1.) erit latus GL æquale rectæ A. Eadem ratione eſt HL = HF (Defin. 15.), & HF = C (Conſtr.); ideoque (Axiom. 1.) erit latus HL = rectæ C. Conſequenter ſupra GH conſtitutum eſt triangulum GLH habens reliqua duo latera GL, LH æqualia reliquis datis rectis lineis A, C. Quod erat faciendum, & demonſtrandum.

Eſt Propoſitio 22. Libri 1. Euclidis.

Corollarium.

Fig. I. II. & III. Tab. IV. Si omnes tres datæ rectæ fuerint æquales inter ſe, deſcriptum triangulum (Defin. 19.) erit æquilaterum; ſi duæ tantum æquales fuerint inter ſe, triangulum (Defin. 20.) erit Iſoſceles; ſi autem omnes tres fuerint inæquales, triangulum deſcriptum (Defin. 21.) erit Schalenum.

PROPOSITIO QUINTA.

Theorema.

Si duo triangula habuerint duos angulos duobus angulis æquales alterum alteri, & latus æquale lateri interpoſito inter angulos æquales, erunt reliqua latera reliquis lateribus æqualia, reliquus angulus reliquo angulo æqualis, & triangulum triangulo æquale erit.

Duo triangula ABC, EFM habeant angulum A æqualem angulo E, angulum C æqualem angulo M, & latus interceptum AC æquale lateri interpoſito EM, oſtendendum eſt latus AB æquale eſſe lateri EF, latus BC = FM, quæ æqualibus angulis opponuntur; angulum B æqualem eſſe angulo F, & triangulum ABC æquale eſſe triangulo EFM. Fig. IV. Tab. IV.

Demonſtratio.

Intelligatur triangulum ABC ita ſuperimponi triangulo EFM, ut punctum A cadat ſupra punctum E, & latus AC ſupra æquale latus EM; punctum C cadet in M, & mutuo congruent duo æqualia latera AC, EM, (Coroll. Defin. 5.). Cum autem ex hypotheſi angulus A ſit æqualis angulo E, latus AB neceſſario cadet ſupra latus EF. Similiter quia eſt angulus C æqualis angulo M, latus CB cadet ſupra MF; conſequenter punctum B commune duobus lateribus AB, CB cadet ſupra punctum F commune duobus lateribus EF, FM, & triangulum ABC perfecte congruet cum triangulo EFM; ergo (Axiom. 14.) erit latus AB = EF, latus BC = FM, angulus B æqualis angulo F, & triangulum, ſeu area ABC æqualis erit areæ trianguli EFM. Quapropter, ſi duo triangula habuerint duos angulos duobus angulis æquales, utrumque utrique, & latus interpoſitum æquale lateri intercepto inter angulos æquales, etiam reliqua reliquis æqualia erunt. Quod erat demonſtrandum.

Eſt prima pars Propoſitionis 26. Libri 1. Euclidis.

PROPOSITIO SEXTA.

Theorema.

Si duo triangula habuerint angulum æqualem angulo, & latera æquales angulos efficientia æqualia inter ſe utrumque utrique; etiam baſis æqualis erit baſi, triangulum æquale triangulo, & reliqui duo anguli reliquis duobus angulis æquales erunt, quibus æqualia latera ſubtenduntur.

Duo triangula ADE, BCF habeant angulum A æqualem angulo B, latus Fig. V. Tab. IV.

latus AD = BC, & latus AE = BF; dico baſim DE æqualem eſſe baſi CF, triangulum ADE æquale eſſe triangulo BCF, angulum D = C, & angulum E æqualem eſſe angulo F, quibus opponuntur latera æqualia.

Demonſtratio.

Triangulum ADE ita ſuperimponatur triangolo BCF, ut punctum A cadat ſupra punctum B, & latus AD ſupra æquale latus BC, punctum D neceſſario cadet in C, quia ex hypotheſi eſt latus AD = BC.

Præterea quia angulus A eſt æqualis angulo B ex hypotheſi, ideo latus AE cadet ſupra BF, & punctum E cadet in F, quia (hypoth.) eſt latus AE = BF; ideoque recta DE (Coroll. Defin. 5.) congruet cum recta CF (quia ex demonſtratis puncta D, & E cadunt in C, & F), & triangulum ADE congruet cum triangulo BCF, angulus D cum angulo C, & angulus E cum angulo F; conſequenter (Axiom. 4.) erit baſis DE æqualis baſi CF, triangulum ADE æquale triangulo BCF, angulus D = C, & angulus E = F. Ergo ſi duo triangula habuerint &c. Quod erat demonſtrandum.

Eſt Propoſ. 4. Libri I. Euclidis.

PROPOSITIO SEPTIMA.

Theorema.

Si duo triangula habuerint duo latera duobus lateribus æqualia, utrumque utrique, & habuerint angulum majorem angulo a lateribus æqualibus contento, habebunt etiam baſim majorem baſi.

Fig. VI. Tab. IV. Duo triangula ABC, EFL, habeant latus AB = FE, latus BC = EL, & angulum ABC majorem angulo E; dico baſim AC oppoſitam majori angulo majorem eſſe baſi FL, quæ ſubtendit angulum minorem.

Concipiatur triangulum EFL ita ſuperimponi triangulo ABC, ut punctum E cadat in B, & latus FE ſupra æquale latus BA extendatur, punctum F neceſſario cadet in A ob æqualitatem laterum EF, BA.

Præterea, quia ex hypotheſi angulus E minor eſt angulo ABC, latus EL cadet infra BC, ut in BR, & latus FL cadet in AR.

Demonſtratio.

In triangulo IBC (Axiom. 17.) duo latera BI, IC ſimul ſumpta, ſunt majora reliquo BC; ſed (hypoth.) eſt latus BC = EL, & (ex conſtruct.) eſt latus BR = EL; iccirco (Axiom. 1.) erit latus BR = BC. Conſequenter duo latera BI, IC, quæ oſtenſa ſunt majora BC (ſecunda parte Axiom. 1.) erunt etiam majora BR; ſed

ſed (Axiom. 11.) eſt $BR = BI + IR$, igitur duo latera BI, & IC, quæ ex demonſtratis ſunt majora BR, (ſecunda parte Axiom. 1.) erunt etiam majora duobus BI, & IR; atque ab æqualibus ſummis $BI + IC > BI + IR$ auferendo communem partem BI (Axiom. 7.), remanebit $IC > IR$; quibus addatur communis portio IA, & (Axiom. 6.) erunt duæ rectæ IC, & IA majores duabus IR, IA; nimirum $IC + IA$, hoc eſt (Axiom. 11.) tota recta AC major erit duabus IR, IA; ſed duæ rectæ IR, IA in triangulo IAR (Axiom. 17.) ſunt majores reliqua AR; ergo (Axiom. 13.) etiam recta AC major erit recta AR. Eſt autem $AR = FL$ per conſtructionem; ideoque (ſecunda parte Axiom. 1.) erit pariter AC major recta FL.

Quapropter ſi duo triangula habuerint &c. Quod erat demonſtrandum.

Eſt Propoſitio 24. Libri I. Euclidis.

PROPOSITIO OCTAVA.

Theorema.

Si duo triangula habuerint duo latera duobus lateribus æqualia, utrumque utrique, & baſim majorem baſi, habebunt pariter angulum majorem angulo a lateribus æqualibus contento.

Duo triangula ABC, EFL, habeant latera æqualia $AB = FE$, $BC = EL$, & baſim AC majorem baſi FL; dico angulum B majorem eſſe angulo E. Fig. VII. Tab. IV.

Demonſtratio.

Etenim ſi angulus B eſſet æqualis angulo E, quia (hypoth.) eſt $BA = EF$, & $BC = EL$, tunc (Propoſ. 6.) etiam baſis AC æqualis eſſet baſi FL, quod eſt contra hypotheſim. Si autem angulus B minor eſſet angulo E, tunc (Propoſ. anteced.) etiam baſis AC minor eſſet baſi FL, quod eſt pariter contra hypotheſim. Ergo angulus B major erit angulo E, quia ex demonſtratis non poteſt eſſe æqualis, nec minor eodem angulo. Quapropter ſi duo triangula &c. Quod erat oſtendendum.

Eſt Propoſitio 25. Libri I. Euclidis.

PROPOSITIO NONA.

Theorema.

Si duorum triangulorum ſingula latera ſingulis lateribus æqualia fuerint, etiam ſinguli anguli ſingulis angulis æquales erunt, quibus æqualia latera ſubtenduntur, & triangulum triangulo æquale erit.

Data ſint duo triangula ACF, EBL, quæ habeant latus $AC =$

BE, latus CF = EL, & baſim AF = BL; oſtendendum eſt angulum C æqualem eſſe angulo E, angulum A = B, angulum F = L, & triangulum ACF æquale eſſe triangulo EBL.

Demonſtratio.

Quoniam duo latera AC, CF (hypoth.) ſunt æqualia duobus lateribus EB, EL, alterum alteri, ſi angulus C non eſſet æqualis angulo E, ſed ipſo major, vel minor, tunc (Propoſ. 7.) etiam baſis AF major, vel minor eſſet baſi BL: quod eſt contra hypotheſim. Cum igitur ſit baſis AF æqualis baſi BL, neceſſe eſt, ut angulus C ſit æqualis angulo E; ipſi autem anguli C, & E, demonſtrati æquales, continentur a lateribus æqualibus; ideoque (Propoſ. 6.) erit etiam angulus A æqualis angulo B, angulus F æqualis angulo L, quibus opponuntur æqualia latera; & triangulum ACF æquale erit triangulo EBL. Ergo ſi duorum triangulorum &c. Quod erat demonſtrandum.

Eſt Propoſitio 8. Libri I. Euclidis.

PROPOSITIO DECIMA.

Problema.

Ad datam rectam lineam indefinitam, & ad punctum in ea datum; angulum rectilineum conſtituere æqualem dato angulo rectilineo.

Fig. IX. Tab. IV. Datus ſit angulus rectilineus A, & data ſit recta CE, & punctum in ea C, oportet ad rectam CE, & in puncto C angulum rectilineum conſtituere æqualem dato angulo A.

Conſtructio.

Ducatur recta FG, quæ jungat duo qualibet puncta laterum AF, AG. Deinde ex indefinita CE (Prop. 3.) ſecetur pars CI æqualis lateri AG, & ſupra CI (Propoſ. 4.) deſcribatur triangulum CMI, cujus latus CM ſit æquale lateri AF, & latus MI ſit æquale lateri FG trianguli AFG: erit MCI quæſitus angulus.

Demonſtratio.

Triangula CMI, AFG (conſtruct.) habent latera CI = AG, CM = AF, & MI = FG; ergo (Propoſ. anteced.) erit angulus MCI æqualis dato angulo A, quibus opponuntur æqualia latera MI, FG. Itaque ad datam rectam lineam &c. Quod erat faciendum, & demonſtrandum.

Eſt Propoſitio 23. Libri I. Euclidis.

PRO-

PROPOSITIO UNDECIMA.

Problema.

Datum angulum rectilineum biſariam dividere.

Angulus rectilineus CAB dividendus ſit biſariam, hoc eſt in duos angulos æquales. Fig. X. Tab. IV.

Conſtructio.

In latere AB ſumatur quodlibet punctum F, & ex alio latere AC indefinite producto verſus C (Propoſ. 3.) ſecetur pars AE æqualis parti AF, & (Poſtul. 1.) jungatur recta FE, ſupra quam (Prop. 1.) deſcribatur triangulum æquilaterum EFL; deinde ex puncto L ad punctum A (Poſt. 1.) ducatur recta LA, quæ datum angulum CAB biſariam ſecabit, ſcilicet in duos æquales angulos CAL, LAB.

Demonſtratio.

Duo triangula AEL, ALF habent latus commune AL, latus AE (conſtruct.) æquale lateri AF, & latus FL (Defin. 19.) æquale lateri LE; iccirco (Prop. 9.) erit angulus LAE æqualis angulo LAF, quibus opponuntur æqualia latera LE, LF. Sed duo anguli LAE, LAF (Axiom. 11.) conſtituunt totum angulum datum CAB; ergo datus angulus biſariam diviſus eſt. Quod erat demonſtrandum. Eſt Propoſitio 9. Libri I. Euclidis.

PROPOSITIO DUODECIMA.

Problema.

Datam rectam lineam terminatam biſariam dividere.

Sit data recta AE terminata in punctis A, & E, quæ dividenda ſit in duas partes inter ſe æquales. Fig. XI. Tab. IV.

Conſtructio.

Super data recta AE (Propoſ. 1.) deſcribe triangulum æquilaterum ABE; deinde (Propoſ. anteced.) biſariam divide angulum ABE per rectam BC, quæ datam AE ſecet in aliquo puncto C: dico rectam AE biſariam diviſam eſſe in C; erit nempe AC = CE.

Demonſtratio.

Duo triangula ABC, BCE habent latus BC commune, & latus

AB

AB = BE (Deſin. 19.); præterea (conſtructione) habent angulum ABC contentum a lateribus AB, BC æqualem angulo CBE contento a lateribus EB, BC; conſequenter (Prop. 6.) habebunt etiam baſim AC æqualem baſi CE, quæ ſimul (Axiom. 11.) adæquant totam AE. Ergo data recta terminata biſariam diviſa eſt, Quod facere, & demonſtrare oportebat.

Eſt Propoſitio 10. Libri I. Euclidis.

Corollarium.

2. Præterea in triangulis ABC, BCE (Propoſ. 6.) erit etiam angulus ACB æqualis angulo BCE, quibus opponuntur latera æqualia AB, BE; ſed duo anguli æquales BCA, BCE ſunt anguli conſequentes, proindeque (Deſin. 9.) erunt ambo recti, & BC erit perpendicularis ad rectam AE; ergo recta BC biſariam dividens angulum ABE contentum a lateribus æqualibus AE, BE, non ſolum biſariam dividit latus AE eidem angulo oppoſitum; ſed eſt etiam perpendicularis ad idem latus. Quæ omnia verificantur etiamſi triangulum ABE non ſit æquilaterum, ſed Iſoſceles, cujus duo latera *inter ſe* æqualia ſint AB, & AE; quia eadem erit demonſtratio.

PROPOSITIO DECIMATERTIA.

Problema.

Ad datam rectam lineam, & ex puncto in eo dato perpendicularem lineam erigere.

Fig. XII. Tab. IV. Data ſit recta AB, & in ea datum ſit punctum C, ex quo erigenda ſit linea recta perpendicularis ad lineam datam AB.

Conſtructio.

In parte CA notetur aliquod punctum E, & habebitur recta terminata CE; deinde ex alia parte CB indeſinite producta (Prop. 3.) ſecetur pars CF = CE; atque ſupra totam EF conſtituatur triangulum æquilaterum ELF (Prop. 1.). Tandem ex puncto L ad punctum datum C (Poſtul. 1.) ducatur recta LC, quæ erit quæſita perpendicularis.

Demonſtratio.

Duo triangula LCF, LCE, habent latus CF = CE (conſtr.), latus CL commune, & latus LF = LE (Deſin. 19.); quapropter (Prop. 9.) erit angulus LCF æqualis angulo LCE, quibus ſubtenduntur latera æqualia; conſequenter (Deſinit. 9.) recta LC erit perpendicularis rectæ EF, ſeu AB. Quod erat faciendum, & demonſtrandum.

Eſt Propoſitio 11. Libri 1. Euclidis.

Scho-

Scholium.

Quando datum punctum eſt extremum lineæ datæ, tum (Poſt. 2.) indefinite producatur data recta, & reliqua fiant, ut antea.

PROPOSITIO DECIMAQUARTA.

Problema.

Ad datam rectam lineam indefinitam, atque ex puncto extra ipſam dato, perpendicularem lineam demittere.

Data ſit recta indefinita AB, & extra ipſam datum ſit punctum C, ex quo ducenda ſit recta linea perpendicularis ad datam AB. Fig. XIII. Tab. IV.

Constructio.

Ex altera parte datæ lineæ AB notetur quodlibet punctum L, & centro C, radio CL deſcribatur circulus, vel arcus ELF, qui ſecet datam rectam AB in E, & F; poſtea ſubtenſa EF (Propoſ. 12.) bifariam dividatur in G, & (Poſt. 1.) ducatur recta CG, quæ erit quæſita perpendicularis. Jungantur radii CE, CF.

Demonstratio.

Triangula CGF, CGE habent latus commune CG, & (constructione) latus GF = GE; latus vero CF = CE (Defin. 15.); iccirco (Propoſ. 9.) erit angulus CGF = CGE; conſequenter (Defin. 9.) recta CG erit perpendicularis ad rectam EF, ſeu AB. Ergo ad datam rectam &c. Quod erat Propoſitum.

Eſt Propoſitio 12. Libri I. Euclidis.

PROPOSITIO DECIMAQUINTA.

Theorema.

Recta linea ſuper aliam rectam inſiſtens efficit duos angulos conſequentes, vel rectos, vel duobus rectis æquales.

Recta linea AB inſiſtat ſupra rectam CE, efficiet duos angulos conſequentes ABC, ABE, qui (Defin. 9.) erunt ambo recti, quando recta AB perpendiculariter cadit ſupra CE. Fig. I. Tab. V.

Si autem recta AB oblique cadit ſupra CE, duo anguli obliqui ABC, ABE ſimul ſumpti, duobus rectis æquales erunt. Fig. II. Tab. V.

Con-

Conſtructio.

Supra rectam CE, atque ex puncto in ea B (Propoſ. 13.) erigatur perpendicularis FB.

Demonſtratio.

Duo anguli FBC, FBE, (Defin. 9.) ſunt ambo recti; angulus vero obtuſus ABC excedit rectum FBC per angulum FBA, & angulus acutus ABE deficit a recto FBE per eundem angulum FBA: quapropter ab angulo obtuſo ABC auferatur pars FBA, relinquetur angulus rectus FBC; angulo vero acuto ABE addatur angulus FBA ex obtuſo ablatus, & (Axiom. 11.) formabitur alter rectus FBE; ergo duo anguli conſequentes ABC, ABE, ſimul ſumpti, duos rectos adæquant. Quod erat oſtendendum.

Eſt Propoſitio 13. Libri I. Euclidis.

Corollarium I.

Hinc omnes anguli CBF, FBA, ABE &c, qui fieri poſſunt in puncto B a quotcumque lineis concurrentibus ex eadem parte lineæ CE, ſimul ſumpti, ſemper duos rectos adæquant.

Corollarium II.

Fig. III. Tab. V. Præterea quatuor anguli, qui fiunt (in B) a duabus rectis (AE, FC) ſe mutuo ſecantibus (in B), quatuor angulis rectis æquales erunt.

Corollarium III.

Fig. IV. Tab. V. Conſequenter ſi ad idem punctum B concurrant quotcumque lineæ rectæ ex utraque parte lineæ AE, omnes anguli, qui ab ipſis rectis efficientur in B, ſimul ſumpti, quatuor angulis rectis æquales erunt.

PROPOSITIO DECIMASEXTA.

Theorema.

Si ad punctum aliquod in data recta ex oppoſitis partibus concurrant duæ rectæ lineæ, quæ efficiant duos angulos conſequentes duobus rectis æquales; illæ duæ rectæ lineæ in directum poſitæ erunt, hoc eſt unicam rectam lineam component.

Fig. V. Tab. V. Sit recta AC, & ad punctum in ipſa C ex oppoſitis partibus, ductæ ſint duæ rectæ BC, FC, quæ efficiant duos angulos conſequentes ACF, ACB, duobus rectis æquales; dico rectas BC, FC in directum poſitas eſſe, ſeu unicam rectam BF conſtituere.

De-

Demonſtratio.

Etenim, ſi fieri poteſt, recta CF non ſit in directum poſita cum recta BC, ſed alia recta CI in directum jaceat cum ipſa recta BC, atque tunc recta AC inſiſtens ſupra rectam BCI (Propoſ. anteced.) efficiet duos angulos ACB, ACI, ſimul ſumptos, duobus rectis æquales; ſed ex hypotheſi duo anguli ACB, ACF, ſimul ſumpti, ſunt etiam æquales duobus rectis; ergo (Axiom. 1.) duo anguli ACB, ACF erunt æquales duobus angulis ACB, ACI; & dempto communi angulo ACB, (Axiom. 3.) remanebit angulus ACF æqualis angulo ACI, ſcilicet totum æquale parti: quod (Axiom. 10.) repugnat. Ergo nulla alia recta linea, niſi CF, in directum jacere poteſt cum linea BC, quando anguli conſequentes ACB, ACF adæquant duos angulos rectos. Quapropter ſi ad punctum aliquod in data recta, &c. Quod erat demonſtrandum.

Eſt Propoſitio 14. Libri 1. Euclidis.

Corollarium

Ergò duæ rectæ lineæ nullam partem communem habere poſſunt præter unicum punctum, in quo ſe invicem ſecant. Etenim ſi linea quantumvis minima CB eſſet pars communis duabus rectis IC, FC; ſi nempe eſſet ICB linea recta, & FCB alia linea recta, tunc ducta ad punctum C alia recta AC, ut antea demonſtravimus, eſſet angulus ACF æqualis angulo ACI, quod (Axiom. 10.) fieri nequit; ideoque linea CB, quamvis minima, non poteſt in directum jacere cum duabus lineis rectis; conſequenter duæ rectæ lineæ nullum habere poſſunt ſegmentum commune. Fig. VI. Tab. V.

PROPOSITIO DECIMASEPTIMA.

Theorema.

Duæ rectæ lineæ ſe mutuo ſecantes efficiunt angulos ad verticem oppoſitos æquales inter ſe.

Duæ rectæ AB, FE ſe invicem ſecent in puncto C; erit angulus x æqualis angulo ECB, & angulus m æqualis angulo z, qui ſunt ad verticem oppoſiti. Fig. VII. Tab. V.

Demonſtratio.

Recta AC incidens ſupra rectam FE efficit duos angulos conſequentes m, & x duobus rectis æquales. Eadem ratione recta FC cadens ſupra AB efficit duos angulos conſequentes z, & x duobus rectis æquales; conſequenter (Axiom. 1.) duo anguli m, & x ſimul ſum-

ſumpti æquales erunt duobus z, & x ſimul ſumptis; & ab æqualibus ſummis m + x, & z + x auferendo communem angulum x, (Axiom. 3.) remanebit angulus m æqualis angulo z, ideſt ACE æqualis angulo FCB, qui ſunt ad verticem oppoſiti.

Præterea duo anguli conſequentes m, & C (Prop. 15.) adæquant pariter duos rectos; ideoque (Axiom. 1.) erunt etiam æquales duobus angulis x, & z, qui (Prop. 15.) adæquant duos rectos: erit nempe m + C = x + z; & auferendo angulos m, & z jam demonſtratos æquales, (Axiom. 3.) relinquetur angulus C æqualis angulo x, qui pariter ſunt ad verticem oppoſiti. Ergo duæ rectæ lineæ &c. Quod erat oſtendendum.

Eſt Propoſitio 15. Libri 1. Euclidis.

Corollarium.

Fig. VIII. Tab. V. Si ex oppoſitis partibus in lineam rectam AB inciderint ad idem punctum C duæ rectæ FC, EC, quæ angulos ad verticem oppoſitos ACE, FCB æquales efficiant; illæ duæ rectæ FC, CE in directum poſitæ erunt. Si enim æqualibus angulis ACE, FCB addatur communis angulus ACF, (Axiom. 2.) duo anguli ACE, ACF ſimul æquales erunt duobus FCB, ACF ſimul ſumptis: atqui duo anguli conſequentes FCB, ACF (Prop. 15.) adæquant duos rectos; ergo (Axiom. 1.) etiam duo anguli ACE, ACF duobus rectis æquales erunt: conſequenter (Propoſ. 16.) duæ rectæ EC, CF in directum jacebunt.

PROPOSITIO DECIMAOCTAVA.

Theorema.

Rectæ lineæ perpendiculares ad eandem rectam ſunt paralellæ inter ſe.

Fig. IX. Tab. V. Duæ rectæ FE, LM ſint ambæ perpendiculares ad eandem rectam AB; dico rectas FE, LM eſſe paralellas.

In recta FE ſumatur quodvis punctum S, & (Propoſ. 14.) demittatur SI perpendicularis rectæ LM: deinde ex altera parte BM (Defin. 3.) ſecetur portio BC = BI, & ex puncto C ad lineam FE (Propoſ. 13.) erigatur perpendicularis CR, atque ducantur rectæ CA, IA.

Demonſtratio.

Conſiderentur duo triangula ABC, ABI, quæ (conſtructione) habent latus BC = BI, latus BA utrique triangulo commune, & angulum ABC (Axiom. 16.) æqualem angulo ABI: ſunt enim recti ex hypotheſi; ergo (Propoſ. 6.) erit baſis CA = baſi IA, angulus z = x, & angulus t = y, quibus ſubtenduntur latera æqualia.

Præterea ob lineas RC, SI (conſtruct.) perpendiculares ad rectam LM, anguli recti RCB, SIB (Axiom. 16.) ſunt æquales, a quibus

bus auferantur partes æquales, ſcilicet anguli z, & x, atque (Axiom. 3.) remanebit angulus ACR æqualis angulo AIS. Similiter ab angulis RAB, SAB ex hypotheſi rectis, & (Axiom. 16.) æqualibus inter ſe demantur partes (Demonſtratione) æquales, ſcilicet anguli t, & y, remanebit angulus RAC æqualis angulo IAS (Axiom. 3.). Quapropter duo triangula ACR, IAS (Demonſtrat.) habent duos angulos RCA, RAC æquales duobus angulis AIS, IAS, & latus interpoſitum AC æquale lateri interpoſito IA; ideoque (Propoſ. 5.) erit latus, ſeu perpendiculum CR æquale lateri, ſeu perpendiculo IS, quæ æqualibus angulis opponuntur; conſequenter duæ rectæ FE, LM (Defin. 11.) erunt parallelæ, cum perpendiculares inter ipſas interceptæ IS, CR oſtenſæ ſint æquales inter ſe: quod ſemper verificatur, ſive perpendiculares IS, CR, viciniores ſint, ſive remotiores a recta AB. Ergo rectæ lineæ perpendiculares &c. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO DECIMANONA.

Theorema.

Si recta linea ſupra duas rectas incidens fecerit angulos alternos æquales inter ſe; vel angulum externum æqualem angulo interno, & oppoſito ad eandem partem; vel duos angulos internos & ad eandem partem poſitos, æquales duobus angulis rectis: illæ duæ rectæ lineæ ſemper erunt parallelæ.

Primo recta GF oblique ſecet duas rectas AB, CL, & efficiat angulum x æqualem angulo z (qui ſunt anguli interni, & oppoſiti, & vocantur *anguli alterni*): dico duas rectas AB, CL eſſe parallelas. Fig. X. Tab. V.

Recta GF (Prop. 12.) bifariam ſecetur in puncto I, ex quo ſupra CL (Propoſ. 14.) demittatur perpendicularis IS; deinde (Propoſ. 3.) ex recta indeterminata GA ſecetur portio GR = SF, & (Poſt. 1.) jungatur recta IR.

Demonſtratio

Triangula RGI, IFS (conſtruct.) habent latus GI = IF, & latus RG = SF, & (hypoth.) angulum x æqualem angulo z, qui ſunt a lateribus æqualibus; ergo (Propoſ. 6.) erit angulus RIG æqualis angulo oppoſito ad verticem SIF; conſequenter (Coroll. Propoſ. 17.) rectæ RI, IS unicam rectam RS conſtituunt. Præterea erit angulus IRG æqualis angulo ISF, qui (conſtruct.) eſt rectus; ideoque (Axiom. 1.) etiam angulus IRG erit rectus, proindeque (Defin. 9.) recta SR erit perpendicularis rectæ AB, & (conſtructione) eſt etiam perpendicularis rectæ CL; conſequenter (Propoſ. antec.) lineæ AB, CL erunt parallelæ, quia perpendiculares eidem rectæ SR.

Si autem ponantur æquales inter ſe duo anguli t, & o, qui pariter ſunt *alterni*; tunc, quia (Propoſ. 15.) tam ſumma angulorum x + t, quam ſumma o + z adæquat duos rectos, iccirco (Axiom. 1.) erit x + t = o + z; & auferendo angulos t, & o ex hypotheſi æquales, (Axiom. 3.) remanebit x = z; conſequenter (antec. Demonſtr.) lineæ AB, CL erunt parallelæ. Ergo ſi recta linea ſupra duas rectas incidens fecerit angulos alternos æquales inter ſe, illæ duæ rectæ erunt parallelæ. Quod erat primum.

Secundo recta CI ſupra duas rectas AF, GH inſiſtens efficiat angulum externum ſ æqualem angulo m interno, & oppoſito ad eandem partem, rectæ AF, GH erunt etiam parallelæ.

Demonſtratio.

Angulus t (Propoſ. 17.) eſt æqualis angulo ſ ad verticem oppoſito; ſed ex hypotheſi angulus m eſt æqualis eidem angulo ſ; igitur (Axiom. 1.) erit angulus t æqualis angulo alterno m: conſequenter (per antec. Demonſtr.) rectæ AF, GH erunt parallelæ.

Fig. XI. Tab. V. Eodem modo demonſtratur rectas AF, GH eſſe parallelas, ſi fuerit angulus externus CLF æqualis angulo z interno, & oppoſito, & ad eandem partem.

Quapropter ſi recta linea ſupra duas rectas incidens fecerit angulum externum æqualem interno, & oppoſito, & ad eandem partem, ipſæ duæ rectæ lineæ erunt parallelæ. Quod erat ſecundum.

Tertio recta LI cadens ſupra rectas AF, GH efficiat angulos x, & m (vel t, & z) internos, & ad eandem partem poſitos ſimul ſumptos æquales duobus angulis rectis, rectæ AF, GH erunt parallelæ.

Demonſtratio.

Duo anguli conſequentes z, & ſ ſimul ſumpti (Prop. 15.) ſunt æquales duobus rectis; ſed (hypotheſ.) duo anguli m, & x ſunt etiam æquales duobus rectis; ideoque (Axiom. 1.) duo anguli z, & m erunt æquales duobus x, & m; a quibus auferatur communis angulus m, & (Axiom. 3.) remanebit angulus z æqualis angulo alterno x; ergo per primam Demonſtrationem rectæ AF, GH erunt parallelæ.

Eodem ratiocinio demonſtratur lineas AF, GH eſſe parallelas, ſi alii duo anguli t, & z interni, & ad eandem partem poſiti fuerint æquales duobus rectis.

Ergo ſi recta linea ſupra duas rectas incidens fecerit duos angulos internos, & ad eandem partem poſitos duobus angulis rectis æquales, illæ duæ rectæ erunt parallelæ. Quod erat tertium.

Hæc Propoſitio continet Propoſitiones 27, & 28 Libri 1. Euclidis.

PRO-

PROPOSITIO VICESIMA.

Theorema.

Si recta linea ſupra duas parallelas incidens fuerit perpendicularis ad unam parallelarum, erit etiam perpendicularis ad alteram.

Sint duæ rectæ parallelæ FE, LM, ſupra quas cadat recta AB, quæ ſit perpendicularis ad rectam LM; dico eandem AB etiam perpendicularem eſſe ad rectam FE. Fig. IX. Tab. V.

Ex puncto B ſecentur æquales partes BI, BC, & (Propoſ. 13.) ad rectam LM erigantur perpendiculares IS, CR, junganturque rectæ IA, CA.

Demonſtratio.

Quoniam triangula ABI, ABC circa angulos (Axiom. 16.) æquales ABI, ABC habent latera æqualia, IB = BC, & BA commune; ideo (Propoſ. 6.) erit baſis IA = CA, angulus x = z, & angulus y = t.

Quapropter ſi ab æqualibus angulis rectis SIB, RCB auferantur æquales anguli x, & z, (Axiom. 3.) remanebit angulus AIS = ACR. Igitur duo triangula AIS, ACR habent angulum AIS = ACR (Demonſtrat.), & latus IA = lateri CA, latus vero SI (Definit. 11.) æquale lateri RC, quia ſunt perpendiculares inter parallelas interceptæ; conſequenter (Propoſ. 6.) erit angulus IAS æqualis angulo RAC, quibus adjungantur anguli y, & t ex demonſtratis æquales, (Axiom. 2.) erit totus angulus SAB æqualis integro angulo RAB; ideoque (Definit. 9.) recta BA erit etiam perpendicularis ad rectam FE. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VICESIMAPRIMA.

Theorema.

Recta linea ſupra duas parallelas oblique incidens efficiet angulos alternos æquales inter ſe; angulum externum æqualem interno, & oppoſito, ad eandem partem; & duos angulos internos, & ad eandem partem poſitos duobus rectis æquales.

Primo duas parallellas AB, CL oblique ſecet recta GF; dico angulos alternos æquales eſſe inter ſe; ſcilicet x = z, & angulum BGF = CFG. Fig. XII. Tab. V.

A punctis F, & G ad rectas AB, CL (Prop. 14.) demittantur perpendiculares FE, GI.

De-

Demonſtratio.

Quoniam (conſtruct.) recta F E eſt perpendicularis rectæ A B, ideo (Propoſ. anteced.) erit etiam perpendicularis ad alteram parallelam C L; conſequenter duæ rectæ E F, G I perpendiculares ad eandem C L (Propoſ. 18.) erunt inter ſe parallelæ. Quapropter duo triangula E F G, I G F habent latus F E = G I (Definit. 11.), quia ſunt perpendiculares inter parallelas A B, C L poſitæ: ſimiliter eſt latus E G = I F, ſunt enim perpendiculares poſitæ inter lineas (Demonſtrat.) parallelas F E, G I; latus vero F G eſt utrique triangulo commune; ergo (Propoſ. 9.) erit angulus x = z, quibus opponuntur latera æqualia E F, G I, & ſunt anguli alterni. Præterea erit angulus o = t, quibus addantur æquales anguli recti E F C, I G B, & (Axiom. 2.) erit totus angulus C F G æqualis integro angulo B G F, qui ſunt pariter alterni. Ergo recta ſupra duas rectas parallelas incidens, efficit angulos alternos æquales inter ſe. Quod erat primum.

Fig. XIII. Tab. V. Secundo recta C I ſupra duas rectas parallelas A F, G H inſiſtens, efficiet angulum externum ſ æqualem angulo m interno, & oppoſito, & ad eandem partem.

Demonſtratio.

Etenim (Propoſ. 17.) angulus ſ eſt æqualis angulo t; & per antecedentem Demonſtrationem angulus m eſt æqualis ipſi angulo t ſuo alterno; ergo (Axiom. 1.) erit angulus ſ æqualis angulo m.

Eodem modo demonſtratur angulus A L C = z, quia ſunt ambo æquales eidem angulo x.

Conſequenter recta linea ſupra duas rectas parallelas inſiſtens efficit angulum externum æqualem angulo interno, & oppoſito ad eandem partem. Quod erat ſecundum.

Tertio recta C I ſecans duas rectas parallelas A F, G H, efficiet duos angulos x, & m internos, & ad eandem partem poſitos, duobus angulis rectis æquales.

Demonſtratio.

Anguli alterni z, & x, per primam partem hujus Propoſitionis, ſunt æquales inter ſe; quibus adjungatur idem angulus m, & duo anguli z, & m (Axiom. 2.) æquales erunt duobus angulis x, & m; ſed anguli conſequentes z, & m (Propoſ. 15.) adæquant duos rectos; ergo (Axiom. 1.) etiam duo anguli x, & m æquales erunt duobus angulis rectis.

Eodem ratiocinio duobus rectis æquales demonſtrantur anguli t, & z; ergo recta linea incidens in duas rectas parallelas, efficit duos angulos internos, & ad eandem partem poſitos, æquales duobus angulis rectis. Quod erat oſtendendum.

Eſt Propoſitio 29. Libri I. Euclidis.

PRO-

PROPOSITIO VICESIMASECUNDA.

Theorema.

Rectæ lineæ (AE, CF) eidem rectæ (DL) parallelæ, inter ſe quoque erunt parallelæ.

Ducatur recta IM eas utcumque ſecans in punctis I, G, M. Fig. XIV. Tab. V.

Demonſtratio.

Quoniam duæ rectæ AE, DL (hypoth.) ſunt inter ſe parallelæ; ideo (prima parte Propoſ. anteced.) erit angulus x æqualis alterno z. Præterea, quia rectæ CF, DL (hypotheſ.) ſunt parallelæ, idcirco (ſecunda parte Propoſ. anteced.) erit angulus internus ſ æqualis angulo z externo, & oppoſito ad eandem partem; ergo (Axiom. 1.) erit angulus x æqualis angulo ſ, qui ſunt alterni; conſequenter (prima parte Propoſ. 19.) duæ rectæ AE, CF erunt parallelæ. Quod erat oſtendendum.

Eſt Propoſitio 30. Libri I. Euclidis.

PROPOSITIO VICESIMATERTIA.

Problema.

Per datum punctum (C) rectam lineam ducere parallelam datæ rectæ (AF).

Ex dato puncto C ad quodlibet punctum L in recta data AF ducatur recta CL; & ad punctum C ſupra rectam CL (Propoſit. 10.) conſtituatur angulus LCE æqualis angulo FLC, recta EC erit quæſita linea. Fig. I. Tab. VI.

Demonſtratio.

Nam anguli alterni ECL, FLC ſunt æquales inter ſe per conſtructionem; ideoque (prima parte Propoſ. 19.) rectæ AF, EC erunt parallelæ. Quod erat faciendum, & demonſtrandum.

Eſt Propoſitio 31. Libri I. Euclidis.

PROPOSITIO VICESIMAQUARTA.

Theorema.

In omni triangulo rectilineo tres anguli ſimul ſumpti adæquant duos angulos rectos: Atque producto quovis latere, angulus externus æqualis erit duobus angulis interioribus, & oppoſitis ſimul ſumptis.

Primo datum ſit triangulum rectilineum ACD; dico omnes ejus Fig. II. Tab. VI.

angu-

angulos internos t, m, & x ſimul ſumptos æquales eſſe duobus angulis rectis.

Per punctum C (Propoſit. anteced.) ducatur recta G C F parallela lateri A D.

Demonſtratio.

Quoniam rectæ G F, A D (conſtruct.) ſunt parallelæ; ideo recta C A in eas incidens (Propoſ. 21.) efficiet angulos alternos æquales, ſcilicet x = z. Item recta C D eaſdem parallelas ſecans efficiet angulos alternos æquales, hoc eſt t = ſ; atque æqualibus æqualia adjungendo; (Axiom. 2.) erit x + t = z + ſ; quibus addatur communis angulus m, & (Axiom. 2.) habebitur ſumma x + t + m = z + ſ + m; atqui (Coroll. 1. Propoſ. 15.) ſumma angulorum z, m, & ſ adæquat duos angulos rectos; ergo (Axiom. 1.) etiam tres anguli x, t, & m, ſimul ſumpti, duobus rectis æquales erunt. Quod erat primum.

Fig.III. Tab.VI. Secundo producatur quodvis latus, ut A D verſus E, & angulus externus C D E erit æqualis duobus angulis x, & m *interioribus*, & oppoſitis, ſimul ſumptis.

Demonſtratio.

Nam duo anguli conſequentes t, & CDE ſimul (Propoſit. 15.) ſunt æquales duobus rectis; ſed tres anguli interni x, t, & m ſimul (anteced. Demonſtr.) ſunt pariter æquales duobus angulis rectis: ergo (Axiom. 1.) duo anguli conſequentes t, & CDE æquales erunt tribus angulis x, t, m ſimul ſumptis. Dematur communis angulus t, & (Axiom. 3.) remanebit angulus externus CDE æqualis duobus angulis x, & m internis, & oppoſitis ſimul ſumptis. Quod erat ſecundum.

Quapropter in omni triangulo rectilineo &c. Quod erat demonſtrandum.

Eſt Propoſitio 32. Libri I. Euclidis.

Corollarium I.

Hinc cujuſcumque trianguli duo anguli ſimul ſumpti ſemper minores erunt duobus rectis, quia per primam Demonſtrationem omnes ſimul ſumpti duos tantum rectos adæquant.

Eſt Propoſitio 17. Libri I. Euclidis.

Corollarium II.

In quolibet triangulo rectilineo, producto uno latere, angulus externus major erit utroque interno, & oppoſito; nam per ſecundam

De-

Demonſtrationem angulus externus CDE adæquat duos internos, & oppoſitos m, & x ſimul ſumptos: conſequenter major erit tam angulo m, quam angulo x, ut per ſe patet.

Eſt Propoſitio 16. Libri I. Euclidis.

Corollarium III.

Si recta linea BL ſuper duas rectas AF, ME incidens, fecerit angulos internos, & ad eandem partem poſitos ABL, & BLM majores duobus rectis; ſunt reliqui duo anguli interni, & ad alteram partem poſiti FBL, ELB erunt minores duobus rectis; qui duo anguli conſequentes in B (Propoſ. 15.) una cum duobus angulis conſequentibus in L efficiunt quatuor rectos, a quibus ſi auferantur duo anguli ABL, MLB ex hypotheſi majores duobus rectis, reliqui duo anguli FBL, ELB erunt minores duobus rectis. Fig. IV. Tab. VI.

Præterea lineæ AF, ME non erunt parallelæ; nam quando lineæ ſunt parallelæ, (Propoſ. 21.) anguli interni, & ad eandem partem poſiti duos rectos adæquant.

Si autem (quod eſt Axioma Undecimum Euclidis) utrinque producantur rectæ AF, ME, utique concurrent ex ea parte, verſus quam anguli interni FBL, ELB ſunt minores duobus rectis; quia (Coroll. 1.) duo anguli cujuſvis trianguli rectilinei, ſimul ſumpti, ſemper minores ſunt duobus rectis. Atque eadem ratione ex alia parte, verſus quam anguli interni ABL, MLB ſunt majores duobus rectis, nunquam convenient, ſed magis magiſque a ſe mutuo recedent. Unde lineæ AF, ME, dicuntur *Convergentes* verſus partem FE, & *Divergentes* ex altera parte AM.

Corollarium IV.

Si a terminis A, & F unius lateris cujuſlibet trianguli ACF ductæ fuerint duæ rectæ AE, FE ad aliquod punctum E intra triangulum; ipſæ rectæ continebunt angulum AEF majorem angulo ACF contento a reliquis lateribus dati trianguli ACF. Fig. V. Tab. VI.

Etenim ducta recta CEL, angulus AEL externus trianguli AEC (Coroll. 2.) major eſt angulo ACE interno, & oppoſito.

Similiter externus angulus LEF major eſt angulo ECF interno, & oppoſito; conſequenter totus angulus AEF major erit interno angulo ACF.

Eſt ſecunda pars Propoſitionis 31. Libri I. Euclidis.

Corollarium V.

Quoniam ſumma trium angulorum cujuſvis trianguli rectilinei (prima parte hujus Propoſitionis) adæquat duos angulos rectos, ideo ſi unus trianguli angulus fuerit obtuſus, ſeu major recto, tunc reliqui

duo anguli erunt acuti, & ſimul ſumpti minores erunt angulo recto.

Si autem unus trianguli angulus fuerit rectus, reliqui duo erunt acuti, & ſimul ſumpti efficient unum angulum rectum.

Quapropter quando unus angulus trianguli æqualis eſt reliquis duobus ſimul ſumptis, tunc angulus ille eſt rectus, quia æqualis dimidio ſummæ duorum rectorum.

Corollarium VI.

Præterea quia (prima parte hujus Propoſitionis) ſumma omnium angulorum cujuslibet trianguli rectilinei ſemper æqualis eſt duobus angulis rectis, iccirco (Axiom. 1.) ſumma trium angulorum cujuſvis trianguli rectilinei æqualis erit ſummæ trium angulorum alterius cujuſcumque trianguli rectilinei.

Corollarium VII.

Quapropter ſi duo anguli unius trianguli æquales fuerint duobus angulis alterius trianguli, etiam reliquus reliquo æqualis erit.

Similiter ſi unus angulus unius trianguli æqualis fuerit angulo alterius trianguli, etiam reliqui duo anguli prioris trianguli ſimul ſumpti æquales erunt reliquis duobus angulis alterius trianguli ſimul ſumptis, quia in utroque triangulo ſemper eandem ſummam duorum rectorum conſtituere debent.

Corollarium VIII.

Summa omnium angulorum cujuslibet figuræ rectilineæ totidem rectos adæquat, quot unitates, demptis quatuor, continet numerus laterum bis ſumptus.

Nimirum ſi datæ figuræ laterum numerus bis ſumatur, & ex ipſo numero duplo ſubtrahatur numerus quatuor, reſiduum indicabit quot angulis rectis æquivaleant omnes anguli interni ejuſdem figuræ, ſimul ſumpti.

Fig. VI. Tab. VI. Ut dato Pentagono ILCFG, ſumma omnium angulorum FCL, CLI, LIG, &c, ejuſdem figuræ æquivalebit decem angulis rectis minus quatuor, hoc eſt efficiet ſex angulos rectos.

Nam intra figuram ſumatur aliquod punctum A, ex quo ad ſingulos angulos datæ figuræ ducantur rectæ AC, AL, AI, &c; figura diviſa erit in totidem triangula, quot habet latera, ſcilicet in quinque; ſed omnes anguli uniuſcujuslibet trianguli (prima parte hujus Propoſitionis) adæquant duos rectos; ergo quia totidem ſunt triangula, quot latera, ſumma omnium angulorum eorumdem quinque triangulorum æquivalebit decem angulis rectis, ſcilicet duplo numero laterum; anguli vero eorundem triangulorum, qui ſiunt in puncto A, non ſpectant ad figuram, & ſimul ſumpti (Coroll. 3. Propoſ. 13.)

poſ. 15.) adæquant quatuor rectos; idcirco ſi ex decem rectis (ſumma omnium angulorum eorundem triangulorum) demantur quatuor recti (ſcilicet omnes anguli, qui ſunt in A), reliqui ſex anguli recti æquales erunt reliquis omnibus triangulorum angulis; nimirum æquales erunt ſummæ omnium angulorum dati pentagoni.

Si data figura habuerit 16. latera, omnes ejus anguli interni ſimul ſumpti æquales erunt 32 angulis rectis minus quatuor, hoc eſt 28 angulos rectos conſtituent: quod eodem ratiocinio demonſtrari poteſt; atque idem intelligatur de alia qualibet figura rectilinea.

Corollarium IX.

Ergo omnia Polygona habentia eundem numerum laterum, habebunt etiam internorum angulorum ſummas æquales inter ſe.

Corollarium X.

Si cujuslibet figuræ rectilineæ ſingula latera ex una tantum parte producantur, omnes anguli externi ſimul ſumpti quatuor rectis æquales erunt.

Etenim in figura CLFGE duo anguli conſequentes LCE internus, & LCD externus ſimul ſumpti (Propoſ. 15.) adæquant duos rectos: quod pariter verificatur in reliquis punctis L, F, G, E. Conſequenter anguli interni ſimul cum externis totidem paria angulorum rectorum efficiunt, quot ſunt polygoni latera; ſive, quod idem eſt, efficiunt numerum angulorum rectorum duplum numeri laterum; ſcilicet in hac figura decem angulos rectos conſtituunt, a quibus auferantur omnes anguli interni, qui (Coroll. 8.) bis tot rectos conſtituunt, quot ſunt latera, demptis quatuor; in hac figura ſex rectos efficiunt; reliqui quatuor anguli recti erunt æquales ſummæ omnium angulorum externorum. Fig. VII. Tab. VI.

Eodem modo idem demonſtratur de alio quolibet polygono.

Corollarium XI.

Quapropter ſumma angulorum externorum cujuslibet figuræ rectilineæ eſt æqualis ſummæ omnium externorum alterius cujuſcumque figuræ rectilineæ.

PROPOSITIO VICESIMAQUINTA.

Theorema.

In quolibet triangulo Iſoſcele anguli ſupra baſim conſtituti ſunt æquales inter ſe: Atque productis æqualibus lateribus, anguli infra baſim conſtituti ſunt etiam inter ſe æquales.

Datum ſit triangulum Iſoſceles ABC, cujus duo latera æqualia Fig. VIII. Tab. VI.

ſunt AB, AC, & baſis ſit BC: erit angulus x æqualis angulo z, qui ſunt ſupra baſim BC; & productis infra baſim BC æqualibus lateribus AB verſus R, & BC verſus E, erit angulus m æqualis angulo ſ, qui ſunt infra baſim.

Baſis BC bifariam dividatur in F (Propoſ. 12.), & ducatur ad verticem A recta FA.

Demonſtratio.

Duo triangula ABF, AFC habent latus AB = AC ex hypotheſi, latus BF = FC per conſtructionem, & latus AF utrique triangulo commune; ergo (Propoſ. 9.) erit angulus x = z, quibus opponitur latus commune AF.

Præterea duo anguli conſequentes x, & m ſimul ſumpti (Propoſit. 15.) ſunt æquales duobus rectis; ſimiliter duo anguli conſequentes z, & ſ ſimul ſumpti adæquant duos rectos; ergo (Axiom. 1.) duo anguli x, & m æquales erunt duobus z, & ſ; a quibus demantur anguli (Demonſtratione) æquales x, & z, atque (Axiom. 3.) remanebit angulus m æqualis angulo ſ. Quapropter in quolibet triangulo iſoſcele, &c. Quod erat oſtendendum.

Eſt celebris Propoſitio 5. Libri I. Euclidis.

Corollarium I.

Quoniam duo triangula ABF, ACF (Demonſtratione) habent ſingula latera ſingulis lateribus æqualia, ideo erit etiam angulus AFB = AFC, quibus opponuntur æqualia latera AB, AC; conſequenter (Definit. 9.) recta AF ex vertice A trianguli iſoſcelis ABC ad baſis medietatem F ducta, perpendicularis erit ad eandem baſim. Præterea etiam bifariam dividet angulum verticalem CAB, quia (Propoſ. 9.) erit etiam angulus FAB æqualis angulo FAC, qui ſubtenduntur a lateribus æqualibus BF, FC.

Corollarium II.

Viciſſim ſi ex vertice A trianguli iſoſcelis ad baſim BC (Propoſit. 14.) demittatur perpendicularis AF, hæc bifariam ſecabit baſim BC, & angulum oppoſitum CAB. Nam (Axiom. 16.) eſt angulus AFB = AFC, & angulus x = z (Demonſtr. anteced.); conſequenter (Corollar. 7. Propoſit. 24.) reliquus angulus FAB erit æqualis reliquo FAC; & (hypotheſ.) eſt latus AB = AC interpoſito inter angulos æquales; ideoque (Propoſit. 5.) erit latus FB = FC, quæ angulis (Demonſtratione) æqualibus opponuntur.

Corollarium III.

Fig. IX. Tab. VI. Omne triangulum æquilaterum ACF eſt etiam æquiangulum; etenim

quia

quia latera CA, CF (Definit. 19.) ſunt æqualia, ideo (prima parte hujus Propoſitionis) erit angulus A = F. Similiter quia eſt AC = AF, erit angulus C = F; icirco (Axiom. 1.) erit angulus A = C: conſequenter omnes tres anguli erunt æquales, & ſinguli continebunt tertiam partem duorum rectorum.

Corollarium IV.

Ergo quilibet angulus trianguli æquilateri adæquat duas tertias partes unius anguli recti; ſex enim tertiæ partes conſtituunt duo integra; & tres anguli trianguli æquilateri oſtenſi ſunt æquales inter ſe, atque ſimul ſumpti (Propoſ. 24.) adæquant duos rectos; ideoque quilibet ipſorum æqualis erit duabus tertiis partibus unius anguli recti.

PROPOSITIO VICESIMASEXTA.

Theorema.

Triangulum habens unum latus alio majus, habebit etiam angulum majori lateri oppoſitum, majorem angulo oppoſito lateri minori.

Sit triangulum ACD, quod habeat latus AC majus latere CD, erit angulus CDA ſubtenſus a majori latere CA major angulo CAD ſubtenſo a minori latere CD. Fig. X. Tab. VI.

Ex majori latere CA (Prop. 3.) ſecetur pars CE æqualis minori CD, & ducatur recta DE (Poſtul. 1.).

Demonſtratio.

In triangulo CDE (conſtruct.) Iſoſcele eſt (Prop. anteced.) angulus x = z; ergo totus angulus CDA, qui (Axiom. 10.) major eſt angulo z ſua parte, erit (ſecunda parte Axiom. 1.) etiam major angulo x; ſed trianguli ADE angulus externus x (Coroll. 2. Prop. 24.) major eſt interno, & oppoſito A; ideoque (Axiom. 13.) angulus CDA, qui oſtenſus eſt major angulo x, erit quoque major angulo A.

Ergo in quolibet triangulo latus majus ſubtendit angulum majorem, & latus minus ſutendit angulum minorem. Quod erat oſtendendum.

Eſt Propoſitio 18. Libri 1. Euclidis.

Corollarium.

Quapropter triangulum Scalenum habebit omnes angulos inæquales.

PRO-

Theorema.

Triangulum habens duos angulos inter ſe æquales, habebit pariter duo latera æqualia ipſis angulis oppoſita. Si autem triangulum habuerit angulum majorem angulo, tunc habebit latus oppoſitum majori angulo majus latere ſubtendente angulum minorem.

Fig. XI. Tab. VI. Primo ſit triangulum ACF, in quo ſit angulus A æqualis angulo F, erit latus CF = CA.

Demonſtratio.

Nam ſi latus CF majus, vel minus eſſet latere CA, tunc (Prop. anteced.) angulus oppoſitus A eſſet pariter major, vel minor angulo F, quod eſt contra hypotheſim; ergo (Axiom. 2.) neceſſe eſt ut latus CF ſit æquale lateri CA. Quod erat primum.

Fig. XII. Tab. VI. Secundo ſit triangulum ACF, cujus angulus A major ſit angulo F, erit latus CF majus latere CA.

Demonſtratio.

Etenim ſi latus CF eſſet æquale lateri CA, tunc (Propoſ. 25.) eſſet angulus A æqualis angulo F, quod eſt contra hypotheſim; ſi autem latus CF eſſet minus latere CA, tunc (Prop. anteced.) angulus A minor eſſet angulo F, quod pariter eſt contra hypotheſim; ergo neceſſe eſt, ut latus CF ſit majus latere CA, quando angulus A major eſt angulo F. Quod erat ſecundum.

Prima pars eſt Propoſitio 6; & ſecunda pars eſt Propoſitio 19. Libri 1. Euclidis.

Corollarium I.

Hinc omne triangulum habens duos angulos æquales, erit Iſoſceles; & ſi habuerit omnes angulos æquales, ſi nempe fuerit æquiangulum, erit etiam æquilaterum; ſi autem habuerit omnes angulos inæquales erit Scalenum.

Corollarium II.

Fig. XIII. Tab. VI. Omnium linearum, quæ ex quolibet puncto C ad quamlibet rectam FB duci poſſunt, minima eſt perpendicularis CL. Nam ſi ducatur quælibet alia recta CA, quia in triangulo ACL angulus rectus ALC major eſt acuto CAL, etiam latus CA oppoſitum majori angulo ALC (ſecunda parte hujus Propoſitionis) majus erit latere CL ſubtendente angulum minorem CAL: quod ſemper verificatur.

Qua-

Quapropter diſtantia inter punctum C, & lineam FE dimetitur a perpendiculari CL; atque ab eodem puncto C ad rectam FE unica duci poteſt linea perpendicularis.

PROPOSITIO VICESIMAOCTAVA.

Theorema.

Omne parallelogrammum habet latera oppoſita æqualia, angulos oppoſitos æquales, & bifariam dividitur a diagonali, ſeu diametro.

Sit parallelogrammum ACFB; erit latus AB = CF, AC = FB, angulus A = F, angulus ACF = FBA; & ducto diametro CB, erit triangulum ABC æquale triangulo CFB. Fig. XIV. Tab. VI.

Demonſtratio.

Rectæ AB, CF (hypotheſ.) ſunt parallelæ; ideo (Prop. 21.) anguli alterni z, & x ſunt æquales. Similiter ob parallelas AC, FB, anguli t, & ſ alterni ſunt æquales; proindeque duo triangula ACB, FCB habent duos angulos ſ, & x æquales duobus angulis t, & z; & latus CB interpoſitum inter angulos æquales commune eſt utrique triangulo; ergo (Prop. 5.) erit latus AB = FC, latus AC = FB, angulus A æqualis angulo F, & triangulum ABC æquale triangulo FCB. Inſuper, quia anguli ſ, & z oſtenſi ſunt æquales t, & x, iccirco (Axiom. 2.) erit totus angulus ACF æqualis integro angulo FBA.

Quapropter in omni parallelogrammo &c. Quod erat demonſtrandum. Eſt Propoſitio 34. Libri 1. Euclidis.

PROPOSITIO VICESIMANONA.

Theorema.

Figura quadrilatera habens duo latera parallela, & æqualia, habebit etiam reliqua duo latera parallela, & æqualia; ſcilicet erit parallelogrammum.

Figura quadrilatera ACFE habeat latus AC parallelum, & æquale lateri EF; etiam latus AE parallelum, & æquale erit lateri CF. Fig. XV. Tab. VI.

Demonſtratio.

Ducatur diagonalis EC, quæ incidens in duas rectas AC, EF, (hypoth.) parallelas, (Prop. 21.) efficit alternos x, & z æquales inter ſe. Itaque duo triangula ACE, EFC habent latus EC commune, & (hypoth.) latus AC = EF, & angulum x = z, qui

ſiunt

ſiunt a lateribus æqualibus; ergo (Prop. 6.) erit AE = CF, & angulus f æqualis angulo m, qui duo anguli ſunt alterni; proindeque (Propoſ. 19.) rectæ EA, FC erunt parallelæ, & figura FA (Deſinit. 17.) erit parallelogrammum.

Itaque figura quadrilatera habens &c. Quod erat oſtendendum.

Eſt Propoſitio 33. Libri 1. Euclidis.

PROPOSITIO TRIGESIMA.

Problema.

Super data recta (AC) quadratum deſcribere, vel aliud quodcumque parallelogrammum.

Fig. XVI. Tab. VI. Supra AC, & ex punctis A, & C erigantur (Prop. 13.) indefinite perpendiculares AB, CF, quæ ambæ (Propoſ. 3.) fiant æquales datæ AC; & ducatur recta FB (Poſtul. 1.); erit AF quæſitum quadratum.

Demonſtratio.

Nam rectæ AB, CF (conſtruct.) perpendiculares eidem AC (Propoſit. 18.) ſunt parallelæ, & (conſtruct.) ſunt æquales; ideoque (Propoſ. anteced.) erit latus FB = AC, & figura AF erit parallelogrammum; ſed eidem lateri AC (conſtruct.) æqualia ſunt latera AB, CF; conſequenter (Axiom. 1.) omnia latera ſunt æqualia; anguli vero A, & C (conſtruct.) ſunt recti; iccirco etiam anguli F, & B ipſis oppoſiti, & æquales (Prop. 18.) erunt recti. Ergo figura BC erit quadratum (Defin. 28.), quia ex demonſtratis eſt parallelogrammum æquilaterum, & rectangulum. Quod erat primum.

Eſt Propoſitio 46. Libri 1. Euclidis.

Fig. XVII. Tab. VI. Secundo, quod ſi æquales perpendiculares AB, CF, majores fiant, vel minores recta AC, tunc ducta recta FB, conſtructa figura erit rectangulum, ſeu oblongum, ut per ſe patet.

Fig. XVIII. Tab. VI. Tertio ſi deſcribendus ſit Rhombus, ducatur ex puncto A recta AB = AC, quæ efficiat angulum A obliquum, acutum nempe, vel obtuſum; deinde per punctum C (Propoſ. 23.) ducatur recta CF parallela, & æqualis rectæ AB, ſeu AC, jungaturque recta FB, erit AF quæſitus Rhombus.

Fig. XIX. Tab. VI. Quarto, quod ſi conſtituto angulo A obliquo, ponatur AB major, vel minor data AC, & compleatur parallelogrammum, habebitur Rhomboides AF. Quod erat propoſitum.

Corollarium.

Ergo parallelogrammum habens unum angulum rectum, etiam reliquos angulos rectos habebit.

PRO-

PROPOSITIO TRIGESIMAPRIMA.

Theorema.

Parallelogramma ſupra eandem baſim, & inter eaſdem parallelas conſtituta inter ſe ſunt æqualia.

Duo parallelogramma ABCE, BCFG habeant communem baſim BC, & inter eaſdem parallelas AF, BR conſtituta ſint, erit parallelogrammum ABCE æquale parallelogrammo BCFG. Fig. XX Tab. VI

Demonſtratio.

Etenim (Propoſ. 28.) eſt AE = BC, & GF = BC; ideoque (Axiom. 1.) erit AE = GF; atque addita communi portione EG, (Axiom. 2.) erit AG = FE.

Unde duo triangula ABG, EFC (Prop. 28.) habent latera BG = FC, AB = CE, & (Demonſtr.) AG = FE; ergo (Prop. 9.) erit triangulum ABG æquale triangulo ECF, a quibus dematur pars communis, hoc eſt triangulum EIG, & (Axiom. 3.) remanebit Trapezium EIBA æquale Trapezio CFGI; quibus addatur commune triangulum IBC, & (Axiom. 2.) erit parallelogrammum ABCE æquale parallelogrammo BCFG; Ergo parallelogramma &c. Quod erat demonſtrandum.

Eſt Propoſitio 35. Libri 1. Euclidis.

Corollarium I.

Area parallelogrammi rectanguli ABCE (Definit. 36.) invenitur multiplicando baſim BC in altitudinem BA æqualem FR. Sed parallelogrammum obliquangulum BCFG oſtenſum eſt æquale rectangulo ABCE; ideoque area cujuſvis parallelogrammi FGBC obtinetur multiplicando baſim BC per altitudinem BA, ſeu FR, ſive CE (Definit. 38.).

Itaque ſi baſis parallelogrammi vocetur m, & ejus altitudo vocetur a, productum am erit area parallelogrammi, videlicet ipſum parallelogrammum ſignificabit.

Corollarium II.

Area vero cujuſlibet trianguli rectilinei ABC eſt æqualis dimidio producto ex altitudine BM in baſim AC. Nam ſi per puncta AB (Propoſ. 23.) ducantur rectæ AE parallela lateri BC, & BE parallela lateri AC, habebitur parallelogrammum ACBE (Propoſ. 28.) duplum trianguli ABC; ſed (Coroll. anteced.) area parallelogram- Fig. I. Tab. VII.

mi ACBE eſt AC×BM; ergo ejus dimidium, ſcilicet area trianguli ABC, erit $\frac{AC\times BM}{2}$.

Itaque ſi baſis AC vocetur b, & altitudo BM vocetur m, productum bm ſignificabit aream parallelogrammi ACBE, & $\frac{bm}{2}$ erit area trianguli ABC.

Sed eſt $\frac{bm}{2} = \frac{b}{2} \times m = b \times \frac{m}{2}$; conſequenter area trianguli etiam obtinetur multiplicando dimidiam baſim in totam altitudinem, vel integram baſim in dimidiam altitudinem.

PROPOSITIO TRIGESIMASECUNDA.

Theorema.

Triangula (ABC, FCB) ſuper eadem baſi (BC), & in iiſdem parallelis (LI, BC) conſtituta, æqualia ſunt inter ſe.

Fig. II. Tab. VII. Per punctum B, & C (Propoſ. 23.) ducantur rectæ BL parallela lateri AC, & CI parallela lateri FB.

Demonſtratio.

Parallelogramma ACBL, FBCI (Prop. anteced.) ſunt æqualia inter ſe; ergo (Axiom. 9.) etiam triangula ABC, FBC æqualia erunt inter ſe, quum (Propoſ. 28.) ſint medietates æqualium parallelogrammorum LC, BI. Ergo &c. Quod erat oſtendendum.

Eſt Propoſitio 37. Lib. 1. Euclidis.

PROPOSITIO TRIGESIMATERTIA.

Theorema.

Fig. III. Tab. VII. *Si parallelogrammum (ABCF), & triangulum (LBC) ſuper eadem baſi (BC) & in iiſdem parallelis (AL, BC) poſita fuerint, parallelogrammum erit duplum trianguli.*

Demonſtratio.

Nam ducta diametro AC, triangulum LBC (Propoſ. antec.) æquale eſt triangulo ABC; atqui triangulum ABC (Propoſ. 28.) eſt dimidium parallelogrammi ABCF; ergo (ſecunda parte Axiom. 1.) etiam æquale triangulum LBC erit dimidium ejuſdem parallelogrammi ABCF). Quod erat demonſtrandum.

Eſt Propoſitio 41. Libri I. Euclidis.

PRO-

PROPOSITIO TRIGESIMAQUARTA.

Problema.

Parallelogrammum conſtituere æquale dato triangulo (ABC), & habens angulum æqualem dato angulo (Z). Fig. IV. Tab. VII.

Ex aliquo trianguli dati angulo B ad latus oppoſitum ſi opus eſt productum (Prop. 14.) ducatur perpendicularis BE, quæ (Propoſ. 12.) bifariam ſecetur in F, & per punctum F (Propoſ. 22.) ducatur recta RM parallela baſi AC. Deinde ad rectam AC, & ad punctum in ea A (Propoſ. 10.) fiat angulus HAC æqualis dato angulo Z. Tandem per punctum C (Propoſ. 23.) ducatur recta CI parallela rectæ AH: erit AHIC quæſitum parallelogrammum.

Demonſtratio.

Area parallelogrammi AHIC (Coroll. 1. Propoſ. 31.) eſt æqualis producto ex altitudine FE in baſim AC; ſed area trianguli ABC (Coroll. 2. Propoſ. 31.) eſt pariter æqualis producto ex baſi AC in FE medietatem altitudinis BE; ergo (Axiom. 1.) areæ erunt æquales, ſcilicet parallelogrammum AHIC æquale erit triangulo ABC. Quod erat propoſitum.

Eſt Propoſitio 42. Libri 1. Euclidis.

Corollarium.

Si datus angulus Z fuerit rectus, tunc parallelogrammum deſcriptum erit rectangulum; ſi angulus Z fuerit obliquus, parallelogrammum erit obliquum.

PROPOSITIO TRIGESIMAQUINTA.

Theorema.

Triangula æqualia ſuper eadem baſi conſtituta, & ad eandem partem poſita, erunt in iiſdem parallelis, ſcilicet eandem altitudinem habebunt.

Supra eandem baſim BC, & verſus eandem partem conſtituta ſint duo triangula æqualia ABC, FBC, ducta recta AF ex vertice A unius ad verticem F alterius trianguli, dico rectam AF parallelam eſſe baſi BC. Fig. V. Tab. VII.

Demonſtratio.

Etenim ſi recta AF non eſſet parallela baſi BC, tunc per punctum A (Propoſ. 23.) duceretur recta, exempli cauſſa, AL parallela baſi BC, quæ alicubi ſecaret latus FB, ut in L, & ducta recta LC, triangulum LBC (Prop. 32.) æquale eſſet triangulo ABC, cui ex hypotheſi jam æquale eſt triangulum FBC; ideoque (Axiom. 1.) eſſet triangulum FBC æquale triangulo LBC, ſcilicet totum æquale parti: quod (Axiom. 10.) fieri nequit. Ergo fieri non poteſt, ut recta AF non ſit parallela baſi BC. Conſequenter triangula æqualia &c. Quod erat propoſitum. Eſt Propoſitio 39. Libri I. Euclidis.

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER TERTIUS.

DEFINITIO PRIMA.

FIguræ ſimiles dicuntur illæ, quæ habent eundem numerum laterum, & angulorum; & habent præterea ſingulos angulos ſingulis angulis æquales, & latera æquales angulos conſtituentia, ſive æqualibus angulis oppoſita, hoc eſt inter angulos æquales intercepta, proportionalia inter ſe.

Fig. VI. & VII. Tab. VII. Singuli anguli pentagoni M æquales ſint ſingulis angulis pentagoni N, ſcilicet
A = F, B = G, C = H, D = I, E = L; & inſuper latera inter angulos æquales poſita, proportionalia ſint ſingula ſingulis, ſcilicet
AB : FG = BC : GH = CD : HI = DE : IL = AE : FL,
ſive alternando ſit
AB : BC = FG : GH,
BC : CD = GH : HI,
CD : DE = HI : IL, &
DE : AE = IL : FL, tunc pentagona M, & N erunt duæ figuræ rectilineæ ſimiles. Idem intelligatur de aliis quibuſcumque figuris ſimilibus.

Corollarium.

Fig. VIII. Tab. VII. Ergo rectilinea (M, & N) ſimilia eidem rectilineo (R), erunt etiam ſimilia inter ſe. Nam anguli polygonorum M, & N, quia (hypoth.) ſunt æquales angulis polygoni R, ſinguli ſingulis, ideo (Axiom. 1.) erunt pariter æquales inter ſe. Similiter, quia rationes laterum polygonorum M, & N, ſunt (hypoth.) æquales rationibus laterum polygoni R; iccirco (Axiom. 1.) erunt etiam æquales inter ſe.

Eſt Propoſitio 21. Libri 6. Euclidis.

Definitio II.

Fig. VI. & VII. Tab. VII. In ſimilibus figuris latera inter angulos æquales poſita dicuntur latera homologa: ut in antecedentibus polygonis ſimilibus M, & N ſunt latera homologa AB, & GF, item CD, & HI, &c.

Definitio III.

Figuræ reciprocæ vocantur illæ, quæ habent latera reciproce proportionalia; ſcilicet in quibus eſt latus unum primæ figuræ ad unum latus ſecundæ, ſicuti aliud latus ſecundæ ad alterum latus primæ.

Fig. IX. Tab. VII. Sic duo triangula ABC, EDF, erunt duæ figuræ reciprocæ, ſi fuerit

AB

AB : DE : : DF : BC, vel
AB : DF : : DE : BC.

Definitio IV.

Triangula (ABF, ACF, AFG &c.) habentia verticem communem (A), & baſes (BF, CF, FG, &c.) in eadem recta linea (BG) poſitas, erunt æque alta; ipſorum enim altitudo (Defin. 38. Libri 2.) eſt perpendicularis ducta ex communi vertice (A) ad lineam (BG), in qua reperiuntur baſes. Fig. 3. Tab. VII.

PROPOSITIO PRIMA.

Theorema.

Parallelogramma æque alta, ſive inter eaſdem parallelas conſtituta, erunt inter ſe in ratione baſium.

Similiter triangula habentia eandem, vel æqualem altitudinem, erunt inter ſe in ratione baſium.

Primo data ſint duo parallelogramma ABCR, FGHL, in iiſdem parallelis AL, BI conſtituta, ſive habentia æquales altitudines AM = LI; dico parallelogrammum AC ad parallelogrammum FH eandem rationem habere, quam habet baſis BC ad baſim GH; nimirum ſi fuerit baſis BC = GH, erit parallelogrammum BR = FH; ſi baſis BC fuerit dupla baſeos GH, & parallelogrammum AC erit duplum parallelogrammi FH. Fig. XI. Tab. VII.

Demonſtratio.

Etenim parallelogrammi BR baſis BC vocetur b, & altitudo AM vocetur c, (Coroll. 1. Propoſ. 31. Lib. 2.) area parallelogrammi BR erit bc. Similiter parallelogrammi FH baſis GH vocetur m, & ejus altitudo LI, quia (hypotheſ.) eſt æqualis altitudini AM, erit pariter c; unde (Coroll. 1. Propoſ. 31. Lib. 2.) erit cm area parallelogrammi FH. Sed (Prop. 2. Lib. 1.) eſt
bc : cm : : b : m, ſcilicet parallelogrammum BR ad parallelogrammum FH, ſicuti baſis BC ad baſim GH. Ergo parallelogramma æque alta ſunt inter ſe in ratione baſium.

Secundo triangula BCR, HLI æque alta, ſive in iiſdem parallelis EM, IB poſita, erunt etiam inter ſe ſicuti baſes BR, LI. Fig. XII. Tab. VII.
Secentur CM = BR, & HE = LI (Propoſ. 3. Libri 2.), atque ducantur rectæ BM, IE, ut (Propoſ. 29. Libri 2.) habeantur duo parallelogramma æque alta RM, LE.

De-

Demonſtratio.

Triangulum BCR eſt dimidium parallelogrammi RM (Prop. 28. Libri 1.), & triangulum HIL eſt dimidium parallelogrammi LE; ſed (Coroll. 1. Prop. 15. Lib. 1.) dimidium cujuſvis quantitatis eſt ad dimidium alterius, ſicuti prima quantitas ad ſecundam; ideoque erit
△BCR : △HLI : : ▭RM ; ▭LE; at per antecedentem Demonſtrationem eſt
▭RM : ▭LE : : BR : LI; ergo (Axiom. 1.) erit
△BCR : △HLI : : BR : LI, ſcilicet △BCR eandem rationem habet ad △HLI, quam habet baſis BR ad baſim LI. Quod erat probandum.

Eſt Propoſitio 1. Libri 6. Euclidis.

Corollarium I.

Ergo ſi baſes parallelogrammorum æqualem, vel eandem altitudinem habentium, fuerint æquales, parallelogramma erunt *pariter æqualia* inter ſe.

Eſt Propoſitio 36. Libri I. Euclidis.

Corollarium II.

Similiter æqualia erunt inter ſe triangula æque alta, ſive in iiſdem parallelis conſtituta, ſi habuerint baſes æquales.

Eſt Propoſitio 38. Libri I. Euclidis.

Corollarium III.

Si duo parallelogramma am, & bm habuerint eandem baſim m, & altitudines inæquales a, & b; tunc parallelogramma erunt inter ſe in ratione altitudinum, quia (Propoſ. 2. Libri 1.) eſt
am : bm : : a : b.

Corollarium IV.

Si autem duo parallelogramma am, & bc fuerint æqualia, & habuerint baſes a, & b æquales inter ſe, habebunt pariter altitudines m, & c inter ſe æquales; eſt enim ex hypotheſi am = bc, & a = b; ideoque dividendo am per a, & bc per b, (Axiom. 1.) remanebit m = c. Ergo parallelogramma æqualia ad eandem partem poſita, & habentia baſes æquales in eadem recta linea poſitas, in iiſdem parallelis conſtituta erunt.

Co-

Corollarium V.

Eadem ratione triangula æqualia, ad eandem partem poſita, & habentia baſes æquales in eadem recta linea conſtitutas, erunt etiam in iiſdem parallelis poſita, ſive eandem altitudinem habebunt: ſunt enim triangula medietates parallelogrammorum eandem altitudinem habentium.
Eſt Propoſitio 40. Libri 1. Euclidis.

PROPOSITIO SECUNDA.

Theorema.

Si in quovis triangulo (ABC) ducatur recta (FG) baſi (AC) parallela, ipſa recta (FG) proportionaliter ſecabit reliqua duo latera (AB, CB), erit nempe (AF : FB : : CG : GB). Fig. XIII. Tab. VII.

Si autem duo trianguli (ABC) latera (BA, BC) proportionaliter ſecta fuerint ab aliqua recta (FG), ipſa recta reliquo lateri, ſeu baſi (AC) erit parallela.

Demonſtratio Primæ Partis.

Ductis rectis AG, FC, duo triangula AFG, CFG in iiſdem parallelis AC, FG, & ſupra eandem baſim FG conſtituta (Prop. 32. Libri 2.) erunt æqualia inter ſe; proindeque (Coroll. 5. Propoſ. 2. Libri I.) habebunt eandem rationem ad idem triangulum BFG; erit nempe
△AGF : △BFG : : △CFG : △BFG; ſed (ſecunda parte Propoſ. anteced.) triangula æque alta ſunt inter ſe in ratione baſium: erit igitur
△AFG : △BFG : : AF : FB, &
△CFG : △BFG : : CG : GB; ergo (Axiom. 1.) erit AF: FB : : CG : GB. Quod erat primo demonſtrandum.

Demonſtratio Secundæ Partis.

Ex hypotheſi eſt
AF : FB : : CG : GB; ſed ductis, ut antea, rectis AG, FC (ſecunda parte Propoſ. anteced.) erit
△AFG : △BFG : : AF : FB, &
△CFG : △BFG : : CG : GB; conſequenter (Axiom. 1.) erit
△AFG : △BFG : : △CFG : △BFG; ideoque triangula AFG, CFG, quæ habent eandem rationem ad idem triangulum BFG, (Coroll. 2. Prop. 3. Lib. 1.) erunt æqualia inter ſe; habent autem eandem baſim FG, & poſita ſunt ad eandem partem; ergo (Prop. 35.

Li-

Libri 2.) erunt in iiſdem parallelis conſtituta, erit nempe FG parallela lateri AC. Quod erat ſecundo demonſtrandum.

Eſt Propoſitio 2. Libri 6. Euclidis.

PROPOSITIO TERTIA.

Problema.

Ex data recta (AB) quamlibet quæſitam partem (ex. caſ. tertiam) abſcindere.

Fig. XIV. Tab. VII. Ducatur ex puncto A indefinita AC, quæ cum data AB efficiat quemlibet angulum CAB, atque in ea ſecentur tres partes AE, EF, FG inter ſe æquales, deinde jungatur recta BG, & per punctum E (Prop. 23. Lib. 2.) ducatur recta EL parallela rectæ BG; erit AL quæſita tertia pars rectæ AB.

Demonſtratio.

In triangulo BGA recta EL (conſtruct.) ducta eſt *parallela lateri* GB; iccirco (prima parte Propoſ. 2.) erit
GE : EA : : BL : LA, & componendo (Propoſ. 4. Lib. 1.) erit
GE + EA : EA : : BL + LA : LA; ſcilicet
GA : EA : : BA : LA; atqui (conſtruct.) recta GA eſt tripla rectæ EA; ergo etiam recta BA erit tripla rectæ LA; ſcilicet erit LA quæſita tertia pars rectæ BA. Quod erat propoſitum.

Eſt Propoſitio 9. Libri 6. Euclidis.

PROPOSITIO QUARTA.

Problema.

Fig. XV. Tab. VII. *Datam rectam (AL) in eadem ratione dividere, qua alia recta (AM) ſecta fuerit (in punctis B, & C).*

Datæ rectæ AL, AM, ita componantur inter ſe, ut efficiant quemlibet angulum LAM; deinde jungatur recta LM, cui (Propoſ. 23. Libri 2.) ducantur parallelæ CF, BE, quæ rectam AL ſecabunt in partes proportionales partibus rectæ AM. Ducatur BI parellela rectæ AL.

Demonſtratio.

In triangulis ACF, BIM (prima parte Propoſ. 2.) eſt AB : BC : : AE : EF, &
BC : CM : : BG : GI; ſed (Propoſit. 28. Libri 2.) eſt BG = EF, & GI = FL; ideoque æqualia æqualibus ſubſtituendo, erit

BC:

BC : CM : : EF : FL; conſequenter recta AL diviſa erit in partes proportionales partibus rectæ AL. Quod erat propoſitum.

Eſt Propoſitio 10. Libri 6. Euclidis.

PROPOSITIO QUINTA.

Problema.

Datis duabus rectis lineis (F, & G), tertiam proportionalem invenire. Fig. XVI. Tab. VII.

Fiat quilibet angulus rectilineus LCB, & ex latere CB (Propoſit. 3. Libri 2.) ſecentur partes CA = F, AB = G, & ex alio latere CL ſecetur CE = G, poſtea ducatur recta EA; huic per punctum B (Propoſ. 23. Libri 2.) ducatur recta parallela EL; erit EL quæſita linea.

Demonſtratio.

Nam (prima parte Propoſ. 2.) eſt
CA : AB : : CE : EL, ideſt
F : G : : G : EL.

Ergo duabus datis rectis inventa eſt tertia proportionalis. Quod erat propoſitum.

Eſt Propoſitio 11. Libri 6. Euclidis.

Corollarium I.

Si prima linea F vocetur a, & ſecunda G vocetur c, tertia inventa EL (Coroll. Propoſ. 9. Lib. 1.) appellabitur $\frac{cc}{a}$; ideoque inventa linea EL exprimit quotientem, qui oritur dividendo quadratum ſecundæ G per primam F.

Corollarium II.

Præterea quia (Demonſtratione) eſt
F : G : : G : EL, ſcilicet
$\div$ F : G : EL; ideoque (Corollar. Propoſit. 1. Libri 1.) erit
$F \times EL = G^2$, ſcilicet inventa linea EL multiplicata per datam F, efficit rectangulum æquale quadrato alterius lineæ datæ G.

PROPOSITIO SEXTA.

Problema.

Datis tribus rectis lineis (F, G, L) quartam proportionalem invenire. Fig. XVII. Tab. VIII.

Conſtituatur angulus rectilineus BCM, atque a lateribus CB, CM

(Propoſ. 3. Libri 2.) abſcindantur partes C A = F , A B = G, & C E = L; deinde jungatur recta A E, cui per punctum B (Propoſit. 23. Libri 2.) ducatur parallela B M; erit E M quæſita linea.

Demonſtratio.

Etenim (prima parte Propoſ. 2.) eſt
C A : A B : : C E : E M, ſcilicet
F : G : : L : E M ; quia (conſtruct.) eſt
C A = F , A B = G, & C E = L.
Ergo tribus datis rectis inventa eſt quarta proportionalis E M. Quod erat faciendum, & demonſtrandum.
Eſt Propoſitio 12. Libri 6. Euclidis.

Corollarium I.

Si datæ lineæ ponantur F = a , G = c , & L = m , tunc inventa recta E M (Propoſ. 9. Libri 1.) erit $\frac{cm}{a}$; conſequenter recta E M eſt quotiens, qui oritur dividendo per primam F rectangulum ex ſecunda G in tertiam L.

Corollarium II.

Quoniam (Demonſtratione) eſt
F : G : : L : E M, ideo (Propoſ. 1. Libri 1.) erit
F × E M = G × L. Ut igitur ſupra lineam F deſcribatur rectangulum æquale rectangulo ex G in L, tribus rectis F, G, L inveniatur quarta proportionalis E M.

PROPOSITIO SEPTIMA.

Theorema.

Triangula æquiangula habebunt latera æqualibus angulis oppoſita proportionalia.

Fig. I. Tab. VIII. Sint duo triangula ABC, EFG æquiangula, quæ nempe habeant angulos æquales A = E, B = F, & C = G; habebunt latera inter angulos æquales poſita proportionalia; ſcilicet erit
AB : EF : : AC : EG : : BC : FG.
Ponatur angulus F ſupra æqualem angulum B; ſive (quod idem eſt) ex lateribus BA, BC (Propoſ. 3. Libri 2.) ſecentur partes BI = FE, BL = FG, & ducatur IL.

De-

Demonſtratio.

Triangula IBL, EFG, habentia latus BI = FE, latus BL = FG, & (hypotheſ.) angulum B = F, (Propoſit. 6. Libri 2.) erunt æqualia; erit nempe baſis IL = EG, angulus LIB = E, & angulus ILB = G; ſed (hypotheſ.) ſunt anguli A = E, & C = G; ergo (Axiom. 1.) erit angulus LIB = A, & ILB = C, externus videlicet interno, & oppoſito ad eandem partem; ideoque (ſecunda parte Propoſ. 19. Libri 2.) erit IL parallela rectæ AC. Conſequenter (prima parte Propoſ. 2.) erit

AI : IB : : CL : LB & componendo erit

AI + IB : IB : : CL + LB : LB; ſcilicet

AB : BI : : CB : BL; & ſubſtituendo latera FE, FG pro æqualibus BI, BL, erit

AB : FE : : CB : FG.

Eodem modo ſi angulus G ſuperimponatur angulo æquali C, demonſtrabitur

CB : FG : : AC : EG; atque (Axiom. 1.) erit

AB : FE : : AC : EG. Igitur latera æqualibus angulis oppoſita erunt proportionalia; hoc eſt

AB : EF : : AC : EG : : BC : FG; & alternando erit

AB : AC : : EF : EG, &

AC : BC : : EG : FG, &

AB : BC : : EF : FG. Quod erat demonſtrandum.

Eſt Propoſitio 4. Libri 6. Euclidis.

Corollarium.

Hinc recta IL parallela lateri AC ſecat triangulum IBL ſimile integro triangulo ABC.

PROPOSITIO OCTAVA.

Theorema.

Triangula, quæ habent latera proportionalia, ſunt etiam æquiangula.

Duo triangula ABC, EFG habeant latera proportionalia Fig. II. Tab. VIII.

AB : BC : : EF : FG, &

AC : CB : : EG : FG, &c;

habebunt angulos æquales, quibus opponuntur latera homologa; nimirum A = E, B = EFG, & C = EGF.

Supra FG ad punctum F conſtituatur angulus GFL = B (Propoſ. 10. Libri 2.), & ad punctum G fiat angulus FGL = C; erit (Coroll. 7. Propoſ. 24. Libri 2.) reliquus angulus L æqualis reliquo A.

Demonſtratio.

Duo triangula ABC, FGL (conſtruct.) æquiangula, (Propoſit. anteced.) habebunt latera proportionalia; erit nempe
AB : BC : : FL : FG, &
AC : CB : : LG : FG; ſed ex hypotheſi eſt
AB : BC : : FE : FG, &
AC : CB : : EG : FG; ideoque (Axiom. 1.) erit
FL : FG : : FE : FG, &
LG : FG : : EG : FG; conſequenter (Corollar. 2. Propoſit. 3. Libri 1.) erit
FL = FE, & LG = EG; eſt inſuper FG baſis communis duobus triangulis FEG, FLG; itaque (Propoſ. 9. Lib. 2.) ipſa triangula habebunt angulos æquales, ſcilicet E = L, EFG = LFG, & EGF = LGF; ſed (conſtruct.) eſt angulus LFG = B, angulus LGF = C, & L = A; ergo (Axiom. 1.) erit angulus A = E, angulus B = EFG, & angulus C = EGF. Quod erat oſtendendum.

Eſt Propoſitio 5. Libri 6. Euclidis.

PROPOSITIO NONA.

Theorema.

Fig. III. Tab. VIII. *Triangula (ABC, EFG) habentia angulum (B) æqualem angulo (F), & latera eoſdem angulos conſtituentia, proportionalia (ſcilicet AB : EF : : BC : FG); habebunt reliquos angulos æquales (A = E, & C = G), quibus opponuntur latera proportionalia; atque ſimilia erunt ipſa triangula.*

Ex lateribus BA, BC (Propoſ. 3. Libri 2.) ſecentur partes BI = EF, BL = FG, & ducatur IL.

Demonſtratio.

Duo triangula ILB, EFG (conſtruct.) habent latus BI = EF, BL = FG, & (hypotheſ.) angulum B = F; iccirco (Propoſ. 6. Libri 2.) erit latus IL = EG, angulus LIB = E, & angulus ILB = G; eſt autem (hypotheſ.)
AB : EF : : BC : FG; unde ſubſtituendo æqualia pro æqualibus, erit
AB : BI : : BC : BL, & dividendo, erit
AB — BI : BI : : BC — BL : BL, hoc eſt
AI : BI : : CL : BL; ergo (ſecunda parte Propoſ. 2.) recta LI erit parallela lateri CA; & (ſecunda parte Propoſ. 21. Libri 2.) erit

erit angulus externus ILB = C, & angulus LIB = A. Sed jam demonſtravimus angulum ILB = G, & angulum LIB = E; conſequenter (Axiom. 1.) erit angulus A = E, & angulus C = G, atque (Propoſ. 7.) triangula ABC, EFG erunt ſimilia. Quod erat demonſtrandum.

Eſt Propoſitio 6. Libri 6. Euclidis.

PROPOSITIO DECIMA.

Theorema.

Si per quodlibet punctum (I) diametri (BR) in parallelogrammo (AC) ducantur duæ rectæ (GL, FE) parallelæ lateribus ejuſdem parallelogrammi, ipſæ rectæ divident totum parallelogrammum in quatuor parallelogramma, quorum duo (GF, & EL), quæ ſunt circa diametrum (BR), erunt ſimilia integro parallelogrammo (AG), & inter ſe. Reliqua vero duo parallelogramma (GE, FL), quæ dicuntur complementa *eorum, quæ ſunt circa diametrum, erunt æqualia inter ſe.* Fig. IV. Tab. VIII.

Demonſtratio Primæ Partis.

In triangulo BRC recta IL (hypotheſ.) parellela lateri RC (Coroll. Propoſ. 7.) ſecat triangulum ILB ſimile integro triangulo BRC; ſimiliter in triangulo ARB recta EI (Corollar. Propoſ. 7.) abſcindit triangulum EIB ſimile triangulo ABR; ideoque (Defin. 1.) erit

RC : CB : : IL : LB, &

AR : AB : : EI : EB; item

CB : BR : : LB : BI, &

BR : BA : : BI : BE; atque ordinando erit

CB : BA : : LB : BE; unde æqualibus æqualia ſubſtituendo, erit etiam

AR : RC : : EI : IL; iccirco parallelogramma AC, EL habent latera proportionalia; præterea habent angulos æquales a lateribus proportionalibus contentos, quia (ſecunda parte Propoſ. 21. Libri 2.) eſt angulus A = IEB, angulus C = ILB, & angulus ARC = EIL, quia (Propoſ. 28. Libri 2.) ſunt ambo æquales oppoſito angulo communi ABC; ergo (Defin. 1.) parallelogrammum EL erit ſimile parallelogrammo AC; cui eodem modo ſimile demonſtratur parallelogrammum GF; conſequenter (Coroll. Defin. 1.) erit etiam parallelogrammum EL ſimile parallelogrammo GF. Quod erat primo demonſtrandum.

Eſt Propoſitio 24. Libri 6. Euclidis.

Demon-

Demonſtratio Secundæ Partis.

Diameter BR (Propoſ. 28. Libri 2.) dividit parallelogramma AC, GF, EL bifariam; eſt nempe
△ABR = △BCR,
△IGR = △IFR, &
△IEB = △ILB; atque ab æqualibus triangulis ABR, *BCR* auferendo æqualia triangula IGR, EIB ex primo ABR, & IFR, ILB ex altero BCR, (Axiom. 3.) remanebit parallelogrammum GE = parallelogrammo FL: ſcilicet complementa erunt æqualiter ſe. Quod erat ſecundo demonſtrandum.
Eſt Propoſitio 43. Libri 1. Euclidis.

Corollarium.

Hinc ſi datum parallelogrammum fuerit quadratum, etiam *paralle*logramma circa ejus diametrum erunt quadrata, quia per *primam* Demonſtrationem ſunt ſimilia eidem parallelogrammo dato.

PROPOSITIO UNDECIMA.

Theorema.

Parallelogramma ſimilia, ſimiliterque poſita, & habentia angulum communem, poſita erunt circa eandem diametrum.

Fig. V. Tab. VIII. Duo parallelogramma BM, LG, habeant angulum A communem, ſint ſimilia, & ſimiliter poſita, ſcilicet ſit angulus B = ILA, & latera proportionalia
AB : BC : : AL : LI, &c;
dico diametrum AI coincidere cum diametro AC.

Demonſtratio.

Nam (hypotheſ.) eſt angulus B = ILA, & latera eoſdem angulos efficientia ſunt proportionalia, videlicet
AB : BC : : AL : LI &c; ergo (Propoſ. 9.) erit angulus CAB = IAL; ſed latus AL coincidit cum latere AB, quia angulus A eſt communis utrique parallelogrammo; ideoque etiam latus AI coincidet cum latere AC; conſequenter parallelogramma BM, & LG, circa eandem diametrum AC conſtituta erunt. Quod erat oſtendendum.
Eſt Propoſitio 26. Libri 6. Euclidis.

PRO-

PROPOSITIO DUODECIMA.

Problema.

Super data recta (AB) terminata rectilineum deſcribere, dato rectilineo (EFGC) ſimile, ſimiliterque poſitum. Fig. VII. Tab. VIII.

A quovis angulo F polygoni dati EFGC ad ſingulos angulos oppoſitos ducantur lineæ diagonales, ut FC, quæ polygonum in triangula dividant. Poſtea ſupra rectam AB (Propoſ. 10. Libri 2.) conſtituantur anguli LBA = FEC, & LAB = FCE, & (Coroll. 7. Propoſitionis 24. Lib. 2.) erit reliquus angulus ALB = CFE. Similiter ſupra AL fiant anguli t = ſ, & r = m, reliquus angulus I æqualis erit reliquo G; atque ita progrediendo, ſi polygonum datum plura contineat triangula, erit ABLI quæſitum rectilineum.

Demonſtratio.

Triangula AIL, GFC (conſtructione) ſunt æquiangula; ideoque (Propoſ. 7.) erit
AI : AL :: CG : CF.
Similiter in triangulis ABL, EFC (conſtructione) æquiangulis, erit
AL : AB :: CF : CE; proindeque ordinando (Propoſ. 6. Libri 1.) erit
AI : AB :: CG : CE.
Eodem modo demonſtratur
BL : LI :: EF : FG. Præterea (Prop. 7.) eſt
LI : IA :: FG : GC, &
AB : BL :: CE : EF, unde latera ſunt proportionalia; anguli vero (conſtructione) ſunt æquales B = E, I = G, IAB = GCE, & ILB = GFE: ergo (Defin. 1.) polygonum ILBA eſt ſimile polygono EFGC, & eodem modo deſcriptum ſupra AB. Quod erat propoſitum.
Eſt Propoſitio 18. Libri 6. Euclidis.

PROPOSITIO DECIMATERTIA.

Theorema.

Triangula ſimilia ſunt inter ſe in duplicata ratione, hoc eſt ut quadrata laterum homologorum.

Sint duo triangula ſimilia ABC, EFI, quæ nempe (Defin. 1.) habeant angulum B = F, A = E, C = I, & latera proportionalia AC : BI :: AB : EF :: BC : FI; dico △ABC ad △EFI ha- Fig. VIII. Tab. VIII.
bere

bere rationem duplicatam lateris AC ad latus EI, vel AB ad EF, &c; erit nempe

$\triangle ABC : \triangle EFI :: \overline{AC}^2 : \overline{EI}^2$, vel :: $\overline{AB}^2 : \overline{EF}^2$ &c.

Triangulum EFI ſuperimponatur triangulo ABC, ita ut punctum E cadat in A, & latus EF cadat in AZ ſupra latus AB; alterum latus EI propter æqualitatem angulorum A, & E cadet ſupra AC, ut in AL, & latus FI cadat in ZL. Deinde jungatur recta LB.

Demonſtratio.

Triangula ABC, ABL, ALZ ſunt quantitates ejuſdem *generis* (Defin. 1. Lib. 1.); ergo ratio primi ABC ad tertium ALZ (Propoſ. 17. Lib. 1.) compoſita eſt ex rationibus primi ABC ad ſecundum ABL, & ſecundi ABL ad tertium ALZ: ſed ratio trianguli ABC ad triangulum æque altum ABL eſt ſicuti AC ad AL (Propoſ. 1.), & ratio trianguli ABL ad triangulum æque altum ALZ eſt ſicuti AB : AZ; ergo ratio primi trianguli ABC ad tertium ALZ, ſeu ad æquale triangulum EFI, componitur ex duabus rationibus AC : AL, & AB : AZ, ideſt (Axiom. 7.) ex *rationibus* AC : EI, & AB : EF (eſt enim AL = EI, & AZ = EF per conſtructionem); ſed ex hypotheſi eſt AC : EI = AB : EF, conſequenter ratio trianguli ABC ad triangulum EFI, compoſita ex duabus æqualibus rationibus AC : EI, & AB : EF, erit duplicata utriuſque (Defin. 22. Lib. 1.), nimirum erit

$\triangle ABC : \triangle EFI :: \overline{AC}^2 : \overline{EI}^2$, vel :: $\overline{AB}^2 : \overline{EF}^2$, vel etiam :: $\overline{BC}^2 : \overline{FI}^2$, quia eſt

AB : EF :: BC : FI ex hypotheſi. Quapropter triangula ſimilia ſunt inter ſe in duplicata ratione, ideſt ſicuti quadrata laterum homologorum. Quod erat demonſtrandum.

Eſt Propoſitio 19. Libri 6. Euclidis.

Corollarium I.

Si igitur duabus lineis AC, & EI inveniatur tertia proportionalis M (Propoſ. 5.), erit prima AC ad tertiam M, ſicut triangulum ABC ad triangulum EFI; nam (Coroll. Prop. 23. Lib. 1.) eſt

AC : M :: $\overline{AC}^2 : \overline{EI}^2$; & per antecedentem Demonſtrationem eſt

$\triangle ABC : \triangle EFI :: \overline{AC}^2 : \overline{EI}^2$; ergo (Propoſ. 11. Lib. 1.) erit

AC : M :: $\triangle ABC : \triangle EFI$.

Corollarium II.

Præterea ſi latus AC fuerit duplum lateris homologi EI, videlicet ſi fuerit

AC : EI :: 2 : 1, tunc triangulum ABC erit quadruplum trianguli

guli EFI, quia ex demonſtratis eſt △ABC : △EFI : : $\overline{AC}^2$: $\overline{EI}^2$, ideſt : : 4 : 1. Si latus AC fuerit decuplum lateris EI, triangulum ABC centies continebit triangulum EFI &c.

PROPOSITIO DECIMAQUARTA.

Theorema.

Parallelogramma æquiangula (R, & S) ſunt inter ſe in ratione compoſita ex rationibus (AB : BE, & BC : BG) laterum æquales angulos conſtituentium (erit nempe R : S : : AB×BC : BE×BG). Fig. IX. Tab. VIII.

Latera AB, BE ita in directum ponantur, ut anguli æquales ABC, EBG ſint oppoſiti, & (Coroll. Propoſ. 17. Lib. 2.) latera CB, BG etiam in directum jacebunt. Producantur latera DC, FE, donec concurrant, ut in L.

Demonſtratio.

Parallelogramma R, X, & S ſunt quantitates ejuſdem generis (Defin. 1. Lib. 1.); iccirco ratio primi R ad ultimum S (Propoſ. 17. Lib. 1.) compoſita erit ex omnibus intermediis rationibus primi R ad ſecundum X, & ſecundi X ad tertium S. At (prima parte Propoſ. 1.) eſt
□ R : □ X : : AB : BE, &
□ X : □ S : : CB : BG,
proindeque ratio parallelogrammi R ad parallelogrammum S compoſita erit ex duabus rationibus AB : BE, & CB : BG; ſcilicet erit
□ R : □ S : : AB × CB : BE × BG. Quod erat oſtendendum.

Eſt Propoſitio 23. Libri 6. Euclidis.

Corollarium.

Ergo ſi fuerit □ R = □ S, erit etiam
AB×CB = BE × BG, & diſſolvendo erit
AB : BE : : BG : CB, hoc eſt parallelogramma æqualia, & æquiangula habebunt latera reciproce proportionalia.

Si autem parallelogramma æquiangula habuerint latera reciproce proportionalia
AB : BE : : BG : CB, tunc (Propoſ. 1. Libri 2.) erit
AB×CB = BE×BG: conſequenter erit etiam
□ R = □ S, quia (Demonſtratione) eſt
□ R : □ S : : AB×CB : BE×BG;
nimirum parallelogramma æquiangula, & habentia latera reciproce proportionalia, æqualia erunt inter ſe.

Eſt Propoſitio 14. Libri 6. Euclidis.

Etiam triangula æquiangula, ſi fuerint æqualia, habebunt latera reci- Fig. VI. Tab. VIII.

ciproce proportionalia; & viciſſim ſi habuerint latera reciproce proportionalia, æqualia erunt inter ſe; quia triangula ſunt inter ſe in eadem ratione, in qua ſunt parallelogramma, quorum (Propoſ. 28. Libri 2.) ſunt dimidia.

Eſt Propoſitio 15. Libri 6. Euclidis.

PROPOSITIO DECIMAQUINTA.

Theorema.

Polygona ſimilia ſunt inter ſe in duplicata ratione, ſeu ut quadrata laterum homologorum.

Fig. X. Tab. VIII. Sint duo polygona ſimilia ABMRC, EFILG, erit polygonum ABMRC ad polygonum EFILG :: $\overline{AC}^2 : \overline{EG}^2$, vel :: $\overline{AB}^2 : \overline{EF}^2$ &c.

Ab angulis æqualibus M, & I, ad angulos oppoſitos ducantur rectæ MA, MC, IE, IG, quæ polygona in ſimilia triangula, & numero æqualia ſecabunt.

Demonſtratio.

Quoniam ex hypotheſi polygona ſunt ſimilia, angulus B eſt æqualis angulo F, & latera proportionalia AB : BM :: EF : FI; proindeque triangula ABM, EFI ſunt ſimilia (Propoſ. 9.). Eadem ratione triangula MRC, ILG demonſtrantur ſimilia. Præterea ſi ab angulis ex hypotheſi æqualibus BAC, FEG auferantur anguli ex demonſtratis æquales BAM, FEI, remanebit angulus CAM = IEG (Axiom. 3.). Item angulus MCA æqualis eſt angulo IGE; conſequenter reliquus angulus AMC æqualis eſt reliquo EIG (Coroll.7. Propoſ. 24. Lib. 2.). Ergo (Prop. 7.) triangula AMC, EIG ſunt ſimilia. Atqui ſimilia triangula ſunt inter ſe in duplicata ratione laterum homologorum (Propoſ. 14.); ergo erit

$\triangle ABM : \triangle EIF :: \overline{AB}^2 : \overline{EF}^2$, &

$\triangle AMC : \triangle EIG :: \overline{AC}^2 : \overline{EG}^2$; item

$\triangle MCR : \triangle ILG :: \overline{CR}^2 : \overline{GL}^2$; eſt autem ex hypotheſi AB : EF :: AC : EG :: CR : GL &c; nimirum (Lemmate Prop. 23. Libri 1.) eſt

$\overline{AB}^2 : \overline{EF}^2 :: \overline{AC}^2 : \overline{EG}^2 :: \overline{CR}^2 : \overline{GL}^2$; ergo (Propoſ. 11. Libri 1.) erit

$\triangle ABM : \triangle EIF :: \triangle AMC : \triangle EIG :: \triangle MCR : \triangle ILG$; conſequenter colligendo (Propoſ. 12. Lib. 1.) erit $\triangle ABM : \triangle EFI :: \triangle ABM + \triangle AMC + \triangle CMR : \triangle EFI + \triangle EIG + \triangle IGL$, ideſt $\triangle ABM : \triangle EFI$ ſicuti polygonum ABMRC ad polygonum

EFILG. Eſt autem $\triangle ABM : \triangle EFI :: \overline{AB}^2 : \overline{EF}^2$; proindeque (Propoſ. 11. Lib. 1.) erit polygonum ABMRC ad polygonum EFILG $:: \overline{AB}^2 : \overline{EF}^2$, vel $:: \overline{AC}^2 : \overline{EG}^2$, vel $:: \overline{BM}^2 : \overline{FI}^2$ &c; quia eſt $\overline{AB}^2 : \overline{EF}^2 :: \overline{AC}^2 : \overline{EG}^2 :: \overline{BM}^2 : \overline{FI}^2$ &c. Quapropter (Defin. 24. Libri 1.) polygona ſimilia ſunt inter ſe in ratione duplicata, ideſt ut quadrata laterum homologorum. Quod erat demonſtrandum.

Eſt Propoſitio 20. Libri 6. Euclidis.

Corollarium I.

Hinc ſi fuerint tres rectæ proportionales $\div AC : EG : M$, polygonum ſupra primam AC deſcriptum, ad polygonum ſimile ſimiliterque deſcriptum ſupra ſecundam EG (Axiom. 1.) erit ut prima linea AC ad tertiam M, quia (Coroll. Propoſ. 23. Lib. 1.) eſt pariter $AC : M :: \overline{AC}^2 : \overline{EG}^2$.

Corollarium II.

Præterea ex demonſtrata Propoſitione ſequitur polygona ſimilia ſecari in ſimilia triangula, numero æqualia, & proportionalia totis polygonis.

PROPOSITIO DECIMASEXTA.

Theorema.

Si fuerint quatuor, vel plures rectæ lineæ proportionales ($AB : CD :: EF : GH$), etiam polygona ſimilia, & ſimiliter ab eis deſcripta proportionalia erunt (nempe $M : N :: R : S$). Atque e converſo, ſi a rectis lineis ſimilia polygona, ſimiliterque deſcripta, proportionalia fuerint; ipſæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt (erit nempe $AB : CD :: EF : GH$). Fig. XI. Tab. VIII.

Demonſtratio Primæ Partis.

Primo ex hypotheſi habemus $AB : CD :: EF : GH$; ideoque (per Lemma Propoſ. 23. Libri 1.) erit $\overline{AB}^2 : \overline{CD}^2 :: \overline{EF}^2 : \overline{GH}^2$; ſed per antecedentem Propoſitionem ſunt rectilinea ſimilia $M : N :: \overline{AB}^2 : \overline{CD}^2$, & $R : S :: \overline{EF}^2 : \overline{GH}^2$; ergo (Axiom. 1., & Propoſ. 11. Lib. 1.) erit $M : N :: R : S$. Quod erat primo demonſtrandum.

Demonſtratio Secundæ Partis.

Secundo eſt ex hypotheſi M : N : : R : S; ſed (Propoſ. antec.) eſt M : N : : $\overline{AB}^2$: $\overline{CD}^2$, & R : S : : $\overline{EF}^2$: $\overline{GH}^2$; ideoque (Axiom. 1. & Prop. 11. Lib. 1.) erit $\overline{AB}^2$: $\overline{CD}^2$: : $\overline{EF}^2$: $\overline{GH}^2$; conſequenter erit etiam AB : CD : : EF : GH. Quod erat oſtendendum.

Eſt Propoſitio 22. Libri 6. Euclidis.

PROPOSITIO DECIMASEPTIMA.

Theorema.

In omni triangulo rectangulo ſi ab angulo recto ſupra latus oppoſitum demittatur linea perpendicularis, dividet totum triangulum in duo triangula ſimilia toti, & ſimilia inter ſe.

Fig XII. Tab. VIII. Sit triangulum ABC habens angulum rectum B, a quo demittatur perpendicularis BL ſupra latus oppoſitum AC: duo triangula ABL, BCL erunt ſimilia toti ABC, & inter ſe.

Demonſtratio.

Nam angulus rectus ABC eſt æqualis recto ALB (Axiom. 16.), angulus vero in A eſt communis duobus triangulis ABC, ABL; ergo (Coroll. 7. Propoſ. 24. Libri 2.) reliquus angulus C æqualis erit reliquo angulo ABL. Itaque duo triangula ABC, ABL (Propoſ. 7.) ſunt ſimilia; erit igitur latus AC oppoſitum angulo recto B, ad latus AB oppoſitum angulo recto L, ſicuti idem latus AB oppoſitum angulo C, ad latus AL oppoſitum angulo æquali ABL, erit nempe ∺ AC : AB : AL. Similiter triangulum ABC demonſtratur ſimile triangulo BLC; habent enim angulum C communem, & angulum rectum ABC æqualem recto BLC, unde reliquus angulus A æqualis erit reliquo angulo CBL. Itaque (Propoſ. 7.) erit
AC : CB : : CB : CL, ideſt ∺ AC : CB : CL.
Tandem (Coroll. Defin. 2.) ſimilia ſunt inter ſe triangula ABL, BLC; eſt enim angulus A = LBC, ALB = BLC, & C = LBA; ideoque (Propoſ. 7.) erit AL : LB : : LB : LC, nempe ∺ AL : LB : LC. Quod erat demonſtrandum.

Eſt Propoſitio 8. Libri 6. Euclidis.

Scholion.

In triangulo rectangulo latera AB, BC, conſtituentia angulum rectum, appellantur *Catheti*, ut diximus Defin. 25; & latus AC angulo recto oppoſitum *Hypothenuſa* vocatur.

Co-

Corollarium I.

Hinc quilibet cathetus A B, vel BC eſt medius proportionalis inter hypothenuſam A C, & ejus ſegmentum A L, vel C L, interceptum inter eundem cathetum, & perpendicularem demiſſam ab angulo recto ad hypothenuſam. Demonſtravimus enim ob ſimilitudinem triangulorum eſſe ∺ A C : A B : A L, & ∺ A C : C B : C L; conſequenter (Propoſit. 23. Libri 1.) erit rectangulum $AC \times AL = \overline{AB}^2$, & rectangulum $AC \times CL = \overline{CB}^2$. Atque dividendo has æquationes per A C, (Axiom. 5.) habebitur $AL = \frac{\overline{AB}^2}{AC}$, & $CL = \frac{\overline{CB}^2}{AC}$: nimirum ſi quadratum cujuſlibet catheti dividatur per hypothenuſam, quotiens dabit ſegmentum hypothenuſæ interpoſitum inter eundem cathetum, & perpendicularem demiſſam ab angulo recto ad hypothenuſam.

Corollarium II.

Præterea (Demonſtratione) eſt ∺ A L : L B : L C; ideoque perpendicularis B L ab angulo recto ſupra hypothenuſam A C demiſſa, eſt media proportionalis inter ſegmenta A L, L C ejuſdem hypothenuſæ. Quapropter (Propoſit. 23. Libri 1.) erit rectangulum $AL \times LC = \overline{LB}^2$.

PROPOSITIO DECIMAOCTAVA.

Theorema.

Si ſuper tria cujuſvis trianguli rectanguli latera tres figuræ ſimiles, ſimiliterque poſitæ deſcribantur, erit figura ſupra hypothenuſam deſcripta ſemper æqualis duabus figuris ſimul ſumptis ſupra cathetos deſcriptis.

Sit triangulum rectangulum A B C, atque ſupra hypothenuſam C deſcripta ſit quælibet rectilinea figura M, ſi ſupra cathetos A B, BC deſcribantur (Propoſ. 13.) duæ figuræ S, T eidem figuræ M ſimiles, ſimiliterque poſitæ (Definit. 3.); erit figura M æqualis duabus figuris S T ſimul ſumptis. Fig. XIII. Tab. VIII.

Demonſtratio.

Ab angulo recto B demittatur perpendicularis B L C (Prop. 14. Libri 2.), & ex antecedenti Propoſitione habebimus ∺ A C : A B : A L; ideoque (Coroll. 1. Propoſ. 16.) erit M : S : : A C : A L. Similiter (Propoſ. anteced.) habemus ∺ A C : C B : C L; ergo (Coroll. 1. Propoſ. 16.) erit M : T : : A C : C L. Quapropter habemus duas proportiones

M : S

M : S : : AC : AL, & M : T : : AC : CL, quæ habent eoſdem antecedentes M, & AC; ideoque (Propoſ. 15. Libri 2.) erit M : S + T : : AC : AL + CL. Atqui (Axiom. 10.) eſt AC = AL + CL, ergo erit etiam M = S + T. Quod erat demonſtrandum.

Eſt Propoſitio 31. Libri 6. Euclidis.

Corollarium I.

Fig. XIV. Tab. VIII. Ergo in omni triangulo rectangulo ABC quadratum hypothenuſæ AC æquale eſt quadratis AR, BI cathetorum AB, BC: omnia enim quadrata ſunt figuræ rectilineæ ſimiles, ſimiliterque deſcripta (Defin. 1.), ut per ſe patet. In hoc Corollario continetur nobiliſſimum, atque utiliſſimum Theorema, cujus inventor *Pythagoras*, cum, falſo, a Muſis ſe in ea inventione adjutum putaret (Deum omnis ſapientiæ, doctrinæque auctorem eſſe fortaſſe *ignorans*), *maximas* gratias agens, hoſtias dicitur Diis immolaviſſe, ut *inquit Vitruvius* Lib. 9. Cap. 2.

Eſt Propoſitio 47. Libri I. Euclidis.

Corollarium II.

Hinc datis duobus cujuſvis trianguli rectanguli lateribus, facile eſt tertium invenire. Etenim ſi dati ſint duo catheti exemp. cauſ. AF pedum quatuor longitudinis, & AC trium pedum, atque invenienda ſit longitudo hypothenuſæ FC, fiant cathetorum 4, & 3 quadrata 16, & 9, quæ in unam ſummam colligantur, & ex eadem ſumma 16 + 9, ideſt 25, extrahatur radix quadrata, quæ erit 5; atque hæc erit hypothenuſæ FC longitudo, quia ejus quadratum 5 × 5, ideſt 25, adæquat quadrata 16, & 9 cathetorum 4, & 3. Si *autem* data fuerit hypothenuſa FC pedum 5 longitudinis, & unus ex cathetis AC trium pedum, & quæratur alter cathetus AF; tunc ex hypothenuſæ quadrato 25 ſubtrahatur quadratum 9 dati catheti AC, & ex reſiduo 25 — 9, ideſt ex 16 extrahatur radix quadrata 4, quæ erit longitudo catheti AF.

Corollarium III.

Fig. XVI. Tab. VIII. Si triangulum rectangulum ACD fuerit Iſoſceles, tunc quadratum hypothenuſæ CD erit duplum tam quadrati ex catheto AC, quam quadrati ex catheto AD. Nam ex antecedenti Corollario primo eſt CD — 2 = AD — 2 + AC — 2; ſed quadrata linearum æqualium AD, AC (Arith. 182.) ſunt æqualia inter ſe; ideo quadratum hypothenuſæ CD erit duplum tam quadrati ex catheto AD, quam quadrati ex catheto AC. Sive erit quadratum hypothenuſæ CD ad quadratum catheti AD, vel AC, ſicuti duo ad *unum*; nimirum CD — 2 : AD — 2 = 2 : 1.

PRO-

PROPOSITIO DECIMANONA.

Problema.

Rectam lineam invenire, cujus quadratum adæquet quadrata plurium datarum linearum, A, B, C, &c.

Reſolutio.

Ducatur in plano recta EF = A, & ſupra EF erigatur perpendicularis FG = B (Propoſ. 11. Lib. 2.), & ducatur hypothenuſa GE, cujus quadratum (Coroll. 1. Propoſ. anteced.) erit æquale duobus quadratis cathetorum EF, & FG, ideſt (conſtructione) linearum A, & B. Similiter ad rectam EG erigatur perpendicularis GL = C, & ducatur hypothenuſa LE, cujus quadratum (Corollar. 1. Propoſ. anteced.) erit æquale duobus quadratis cathetorum EG, GL, ſive GE, & C. Sed quadratum lineæ GE oſtenſum eſt æquale quadratis linearum A, & B; ergo quadratum rectæ LE adæquat tria quadrata linearum A, B, C ſimul ſumpta; atque ita procedendo, ſi plures fuerint datæ rectæ, ſemper invenietur quæſita linea. Quod erat propoſitum. Fig. I. Tab. IX.

PROPOSITIO VIGESIMA.

Theorema.

Quadrati diameter eſt incommenſurabilis lateri ejuſdem quadrati.

Quoniam omnes numeri ſunt inter ſe commenſurabiles (Defin. 3. Libri 1.), ideo lineæ illæ dicuntur commenſurabiles, quæ ſunt inter ſe ſicuti numerus quilibet ad alium quemlibet numerum; exempli cauſſa linea ſeptem pedum, & linea viginti novem pedum ſunt inter ſe commenſurabiles, quia ſicuti unitas eſt communis menſura numerorum ſeptem, & viginti novem; ita linea unius pedis longitudinis eſt communis menſura linearum ſeptem, & viginti novem pedum longitudinis: unde prima linea eſt ad ſecundam, ſicuti numerus 7 ad numerum 29.

Lineæ vero incommenſurabiles dicuntur (Definit. 4. Lib. 1.), quando nullam habent communem menſuram, ideſt quando non ſunt inter ſe ſicuti numerus ad numerum. In omni autem quadrato ABCM ratio diametri AC, ad latus AB, numeris exprimi nequit. Fig. II. Tab. IX.

Demon-

Demonſtratio.

Nam in triangulo rectangulo iſoſcele ABC quadratum ex hypotheneuſa AC eſt duplum quadrati ex latere AB (Coroll. 3. Prop. 18.) ; itaque ſi latus AB fuerit trium pedum longitudinis , ejus quadratum erit 9 pedum quadratorum (Schol. Defin. 26. Libri 2.) , cujus duplum , ideſt quadratum diametri AC, erit 18 pedum quadratorum ; ergo diameter AC erit $\sqrt{18}$, & latus AB ex hypotheſi eſt $\sqrt{9}$, ideſt 3 (Algeb. 84.) : itaque eſt diameter AC ad latus AB : : $\sqrt{18}$: 3 ; atqui radix numeri 18 in numeris inveniri nequit , quia nullus numerus in ſeipſum multiplicatus producere poteſt numerum 18 ; ideoque ratio diametri AC ad latus AB numeris exprimi nequit : conſequenter ſunt lineæ incommenſurabiles. Quod erat oſtendendum.

Eſt Propoſitio 117. Libri 10. Euclidis celebratiſſima apud veteres Philoſophos , ita ut qui hanc neſciret , eum divinus Plato non hominem eſſe , ſed pecudem diceret.

ELE-

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER QUARTUS.

DEFINITIO PRIMA.

C*Irculi Concentrici* dicuntur, qui habent idem centrum. *Circuli* vero *Eccentrici* ſunt illi, qui habent centra diverſa.

Definitio II.

Tangens circuli dicitur linea recta, quæ circuli peripheriam in unico puncto tangit, & utrinque indefinite producta ipſam peripheriam non ſecat: ut recta *EB*, quæ circulum tangit in puncto L. Fig. III. Tab. IX.

Angulus contactus dicitur angulus mixtilineus ELA, vel BLC, a tangente, & a peripheria circuli conſtitutus.

Definitio III.

Circuli æquales ſunt illi, qui habent diametros, aut radios æquales, atque mutuo ſuperimpoſiti congruunt.

Definitio IV.

Si a duobus peripheriæ punctis A, & C ad aliud ejuſdem peripheriæ punctum B ducantur duæ rectæ AB, CB, quæ efficient angulum ABC; idem angulus ABC dicatur *contentus*, vel *inſcriptus* in circuli ſegmento, ſeu portione ABC. Præterea idem angulus ABC dicitur *inſiſtere* arcui oppoſito AEC, quia ejus latera BA, BC eundem arcum intercipiunt. Fig. IV. Tab. IX.

Angulus vero BAC dicitur inſcriptus in ſegmento BAEC, & inſiſtere arcui BC; atque ita de reliquis.

Definitio V.

Dato quovis angulo rectilineo EAB, ſi centro ejus vertice A, & quovis intervallo AB deſcribatur circulus BEFC, arcus BLE interceptus a lateribus AB, AE, ejuſdem anguli BAE *menſura* appellatur. Nam quo major eſt angulus EAB, eo major erit arcus oppoſitus BLE; & e converſo, quo minor eſt angulus, eo minor erit arcus oppoſitus. Similiter arcus FE eſt menſura anguli FAB, & arcus FC eſt menſura anguli FAC. Arcus EFC eſt menſura anguli CAE; & ſic de cæteris. Fig. V. Tab. IX.

Definitio V I.

Fig. VI. Tab. IX. Peripheria cujuslibet circuli ABEL dividi ſolet in 360 partes, ſeu arcus æquales, qui *Circuli gradus* appellantur. Rurſus quilibet gradus dividitur in alias 60 partes æquales, quæ vocantur *minuta prima*. Quodlibet autem minutum primum adhuc dividitur in alias 60 partes æquales, quæ vocantur *minuta ſecunda*; atque ita deinceps de minutis tertiis, quartis &c.

Quapropter ſemcirculus ABE, vel ALB continebit gradus $\frac{360}{2}$, ideſt 180; & quarta pars circumferentiæ, ut AB, vel EB, continebit gradus $\frac{360}{4}$, ſeu $\frac{180}{2}$, ideſt 90.

Definitio V I I.

Fig. VI. Tab. IX. Si ex centro C ſupra diametrum AE erigatur perpendicularis CB, erit arcus AB æqualis arcui BE; quia linea CB non magis inclinatur verſus A, quam verſus E (Defin. 8. Libri 2.); ideoque menſura anguli recti ACB eſt arcus oppoſitus AB, quarta peripheriæ pars, ideſt arcus graduum 90. Similiter arcus BFE graduum 90 eſt menſura anguli recti BCE. Idem de reliquis intelligatur.

Menſura vero cujuſvis anguli obtuſi ACF eſt arcus ABF major arcu BA 90 graduum; & anguli acuti FCE menſura eſt arcus FE minor arcu BE graduum 90.

Corollarium.

Quapropter ſemicircumferentia ABE eſt menſura duorum rectorum ACB, BCE; & integra peripheria eſt menſura quatuor angulorum rectorum.

Definitio V I I I.

Fig. VII. Tab. IX. Figura mixtilinea CAB comprehenſa a duobus radiis CA, CB, & ab arcu intercepto BA, dicitur *Sector circuli*. Cum vero angulus BCA a radiis contentus eſt rectus, tunc arcus BA (Definit. anteced.) eſt quarta peripheriæ pars, & ſector CAB appellatur *Quadrans circuli*: eſt enim circuli integri quarta pars.

PROPOSITIO PRIMA.

Theorema.

Circuli concentrici habent peripherias æquidiſtantes, ſeu parellelas.

Fig. VIII. Tab. IX. Sint circuli concentrici BCFG, ERIL, habebunt peripherias æquidiſtantes.

De-

Demonſtratio.

Nam a communi centro A ducantur radii AB, AC, AF, AG, &c, qui erunt æquales inter ſe (Defin. 15. Libri 2.), a quibus ſi auferantur radii, ſeu partes æquales AL, AI, AR, AE &c, reliquæ partes LB, IC, RF, EG &c erunt ſemper æquales inter ſe (Axiom. 3.); quod ubique verificatur; conſequenter peripheriæ BCFG, ERIL erunt æquidiſtantes, ſeu parallelæ. Quod erat oſtendendum.

Corollarium I.

Ergo circuli, quorum peripheriæ ſe invicem ſecant, non ſunt concentrici.

Eſt Propoſitio 15. *Libri 3. Euclidis.*

Corollarium II.

Similiter circuli, quorum peripheriæ ſe mutuo tangunt, habere nequeunt idem centrum.

Eſt Propoſitio 6. Libri 3. Euclidis.

PROPOSITIO SECUNDA.

Theorema.

Recta linea a centro circuli ad medietatem cujuſvis chordæ ducta, eſt perpendicularis eidem chordæ. E converſo ſi a centro circuli ſupra quamlibet chordam ducatur recta perpendicularis, eandem chordam bifariam ſecabit.

Primo, in circulo ABFR, & ab ejus centro C ad medietatem E chordæ BR ducta ſit recta CE, erit hæc recta perpendicularis chordæ BR. Fig. IX. Tab. IX.

Demonſtratio Primæ Partis.

Nam ductis radiis CB, CR, triangulum CBR erit iſoſceles; ergo (Coroll. 1. Propoſ. 25. Libri 2.) recta CE ab ejus vertice ad medietatem baſis ducta, erit perpendicularis eidem baſi BR. Quod erat primum.

Secundo, ſi a centro C ſupra chordam BR ducatur perpendicularis CE, hæc bifariam ſecabit chordam BR.

Demonſtratio Secundæ Partis.

Etenim ductis, ut antea, radiis CB, CR, in triangulo iſo-

ſcele CBR, recta CE a vertice perpendiculariter ducta ſupra baſim (Coroll. 2. Propoſ. 25. Lib. 2.), eandem baſim BR bifariam ſecabit, Quod erat ſecundum.

Eſt Propoſitio 3. Libri 3. Euclidis.

Corollarium.

Fig. X. Tab. IX. Quapropter circuli centrum ſemper reperitur in perpendiculari ad medietatem cujuſvis chordæ ducta.

PROPOSITIO TERTIA.

Problema.

Dati circuli centrum invenire.

Fig. IX. Tab. IX. In dato circulo AFBE ducatur utcumque chorda AB, quæ (Propoſit. 12. Libri 2.) bifariam dividatur in puncto C, a quo ſupra eandem AB erigatur perpendicularis CF (Propoſit. 13. Libri 2.), quæ utrinque producatur uſque ad peripheriam in F, & E. Tandem bifariam ſecetur recta FE in puncto I, quod erit quæſitum centrum circuli.

Demonſtratio.

Quoniam a medietate C chordæ AB unica duci poteſt recta eidem chordæ perpendicularis (Coroll. Defin. 9. Libri 2.), & recta a centro ad medietatem chordæ ducta, eſt eidem chordæ perpendicularis (Propoſ. anteced.), ideo centrum circuli reperitur in perpendiculari FE; proindeque erit ipſum punctum I, in quo biſariam dividitur. Quod erat propoſitum.

Eſt Propoſitio 1. Libri 3. Euclidis.

PROPOSITIO QUARTA.

Problema.

Dati arcus centrum invenire, ut integra deſcribatur peripheria.

Fig. XI. Tab. IX. In dato arcu ABL ducantur utcumque duæ chordæ AB, BL, quæ (Propoſ. 12. Lib. 2.) bifariam ſecentur in E, & F, a quibus punctis (Propoſ. 13. Libri 2.) erigantur perpendiculares EC, FC, quæ alicubi ſe ſe mutuo ſecabunt, ut in puncto C, quod erit quæſitum centrum.

Demonſtratio.

Centrum circuli (Propoſ. anteced.) reperitur tam intra perpendicula-

cularem EC, quam intra perpendicularem FC; ideoque erit punctum C, quod eſt utrique perpendiculari EC, FC commune. Quapropter centro C, & intervallo CA, vel CB &c. complebitur integra peripheria. Quod erat faciendum, & demonſtrandum.

Eſt Propoſitio 25. Libri 3. Euclidis.

Corollarium.

Eadem ratione circa quodlibet triangulum ALB, ſive per tria data puncta A, B, L, non in directum poſita, ductis rectis AB, BL, circulus deſcribetur, cujus peripheria tranſibit per tria data puncta, ſeu per angulos A, B, L. Nam bifariam diviſis rectis AB, BL, atque ductis perpendicularibus EC, FC, erit C quæſitum centrum, ut manifeſte apparet ex antecedenti Demonſtratione.

Eſt Propoſitio 5. Libri 4. Euclidis.

PROPOSITIO QUINTA.

Theorema.

Si ab aliquo puncto intra circulum tres rectæ lineæ æquales ad peripheriam ductæ fuerint, punctum illud erit centrum circuli.

A puncto C ad peripheriam circuli EAB ductæ ſint tres rectæ æquales CA, CB, CE; erit punctum C ejuſdem circuli centrum. Fig. XII. Tab. IX.

Ducantur ſubtenſæ BA, BE, quæ bifariam ſecentur in punctis F, & L (Propoſ. 12. Libri 2.), atque ducantur rectæ FC, LC.

Demonſtratio.

Duo triangula CFB, CFE, habent latus FC commune, latus FB æquale FE (conſtruct.), & latus CB æquale CE ex hypotheſi; ideoque (Propoſ. 9. Libri 2.) erit angulus CFB æqualis angulo CFE; conſequenter (Definit. 9. Libri 2.) recta FC eſt perpendicularis chordæ BE; ideoque (Coroll. Propoſ. 2.) centrum circuli erit intra perpendicularem FC. Eadem ratione ſingula latera triangulorum CLB, CLA ſunt æqualia, proindeque anguli CLB, CLA ſunt æquales, & recti, atque circuli centrum reperietur etiam intra perpendicularem LC. Ergo circuli centrum erit punctum C utrique perpendiculari FC, LC commune. Quod erat demonſtrandum.

Eſt Propoſitio 9. Libri 3. Euclidis.

Corollarium.

Ergo a puncto, quod non ſit centrum circuli, duci non poſſunt tres rectæ lineæ æquales ad peripheriam; quia ſi ducerentur, illud punctum eſſet centrum circuli.

PRO-

Problema.

Per quodvis peripheriæ punctum rectam circuli tangentem ducere.

Fig. XIII. Tab. IX. A puncto L in peripheria dato, vel aſſumpto, ad centrum C ducatur radius LC, ſupra quem ex puncto L erigatur perpendicularis ALB (Propoſ. 13. Libri 2.); hæc erit tangens quæſita, nimirum utrinque producta, tota extra circulum cadet.

Demonſtratio.

Ex centro C ad quodlibet aliud punctum E rectæ AB ducatur recta linea CE; atque ſemper habebitur triangulum CLE, *cujus angulus* CLE eſt (conſtruct.) rectus; ideoque (Coroll. 5, *Propoſ.* 24. Libri 2.) angulus CEL erit acutus; conſequenter (*ſecunda parte* Propoſ. 27. Libri 2.) latus CE angulo majori oppoſitum *erit majus* CL oppoſito angulo minori; ſed CL eſt radius; ergo linea CE *eſt* major radio, & ducta eſt a centro circuli: itaque punctum E eſt extra circulum. Eadem ratione reliqua puncta lineæ AB, excepto L, demonſtrantur eſſe extra peripheriam. Ergo recta AB (Definit. 2.) eſt circuli tangens. Quod erat propoſitum.

Corollarium I.

Itaque recta AB extremitati L radii CL, vel diametri FL perpendicularis, eſt tangens circuli.

Præterea cum extremitati diametri unica duci poſſit perpendicularis; ideo una tantum recta tangere poteſt circulum in eodem puncto: conſequenter omnes aliæ rectæ per punctum contactus ductæ circulum ſecabunt.

Eſt Propoſitio 16. Libri 3. Euclidis.

Corollarium II.

Fig. XIV. Tab. IX. Hinc facillime deducitur rectam CM ex centro C ad punctum contactus M ductam, perpendicularem eſſe tangenti AB.

Eſt Propoſitio 18. Libri 3. Euclidis.

Corollarium III.

Similiter patet rectam MC ex puncto contactus M perpendiculariter erectam ſupra tangentem AB tranſire per centrum circuli.

Eſt Propoſitio 19. Libri 3. Euclidis.

PRO-

PROPOSITIO SEPTIMA.

Theorema.

Angulus ad centrum duplus eſt anguli ad peripheriam, quando inſiſtant ſuper eodem arcu.

Primo anguli ACB ad centrum, & ALB ad peripheriam inſiſtant ſuper eodem arcu AEB, & duo ipſorum latera LA, CA conveniant, erit angulus ACB duplus anguli ALB. Fig. XVI. Tab. IX.

Demonſtratio.

Nam in triangulo iſoſcele CBL (ſunt enim radii CB = CL), anguli CBL, CLB (*Propoſ. 25. Libri 2.*) ſunt æquales inter ſe; igitur ejuſdem trianguli BLC angulus externus BCA, qui (ſecunda parte Propoſ. 24. *Lib. 2.*) eſt æqualis duobus angulis CBL, CLB ſimul ſumptis, erit duplus unius CLB; nimirum angulus ACB ad centrum duplus eſt anguli ALB ad peripheriam.

In ſecundo caſu, ubi latera neque conveniunt, neque ſe invicem ſecant, ducatur diameter LE, & ex antecedenti Demonſtratione erit angulus ACE duplus anguli ALE, & angulus ECB duplus anguli ELB; adeoque integer angulus ACB ad centrum erit duplus totius anguli ALB ad peripheriam. Fig. XVII. Tab. IX.

Denique in tertio caſu, in quo latus LB ſecat latus CA, ducatur diameter LI; erit per primam Demonſtrationem totus angulus ACI duplus totius anguli ALI, & pars BCI eſt dupla partis BLI; ergo (Axiom. 15.) etiam reliquus angulus ACB ad centrum erit duplus reliqui anguli ALB ad peripheriam. Quod erat demonſtrandum. Fig. XVIII. Tab. IX.

Eſt Propoſitio 20. Libri 3. Euclidis.

Corollarium.

Quoniam (Defin. 5.) arcus AEB eſt menſura anguli ACB ad centrum; & angulus ALB ad peripheriam, juxta præcedentem Demonſtrationem, eſt medietas ejuſdem anguli ACB ad centrum: ideoque menſura anguli ALB ad peripheriam erit medietas arcus oppoſiti AEB.

PROPOSITIO OCTAVA.

Theorema.

Fig. XIX. Tab. IX. *Omnes anguli ad peripheriam (ALB, AIB, AMB &c.) & in eodem circuli ſegmento (ALIMB) contenti, ſive qui inſiſtunt ſuper eodem arcu (AEB), ſunt æquales inter ſe.*

Demonſtratio.

Quilibet enim ex illis (Propoſ. anteced.) eſt dimidius ejuſdem anguli ACB ad centrum; ideoque (Axiom. 14.) ſunt æquales inter ſe. Sive (quod idem eſt) quilibet ex illis habet pro menſura medietatem arcus oppoſiti AEB, cui omnes inſiſtunt (Coroll. Propoſ. anteced.); ergo ſunt æquales inter ſe. Quod erat oſtendendum.

Eſt Propoſitio 21. Libri 3. Euclidis.

PROPOSITIO NONA.

Theorema.

Fig. I. Tab. X. *Omne quadrilaterum (ABCL) in circulo inſcriptum, ſive cujus anguli ſunt in peripheria circuli, habet angulos oppoſitos (A, & C; item B, & L) ſimul ſumptos duobus rectis æquales.*

Demonſtratio.

Nam angulus BAL (Coroll. Propoſ. 7.) habet pro menſura medietatem arcus oppoſiti BCL. Similiter anguli BCL menſura eſt medietas arcus oppoſiti BAL; ideoque duo anguli A, & C ſimul ſumpti habent pro menſura medietatem integræ peripheriæ; medietas vero integræ peripheriæ eſt menſura duorum rectorum (Coroll. Defin. 7.); ergo duo anguli oppoſiti, A, & C ſimul ſumpti adæquant duos rectos. Eodem ratiocinio duobus rectis æquales demonſtrantur reliqui duo anguli oppoſiti B, & L ſimul ſumpti. Quod erat demonſtrandum.

Eſt Propoſitio 22. Libri 3. Euclidis.

Corollarium.

Nullum igitur parallelogrammum obliquangulum poteſt habere omnes angulos in peripheria circuli.

PROPOSITIO DECIMA.

Theorema.

Angulus in ſemicirculo inſcriptus ſemper eſt rectus.

Sit circulus ACLB, & ab extremis cujuſvis diametri AL ad quodvis ſemiperipheriæ punctum C ductæ ſint duæ rectæ AC, LC; angulus ACL in ſemicirculo ACFL inſcriptus, ſeu contentus, erit rectus. Fig. II. Tab. X.

Demonſtratio.

Etenim anguli ACL menſura (Coroll. Prop. 7.) eſt dimidium arcus oppoſiti ABL; ſed arcus ABL eſt ex hypotheſi ſemicircumferentia, quæ eſt menſura duorum rectorum (Coroll. Defin. 7.); proindeque ejus medietas erit menſura unius recti; ergo angulus ACL, cujus menſura eſt dimidium ſemiperipheriæ ABL erit rectus. Quod erat oſtendendum. Eſt prima pars Propoſ. 31. Libri 3. Euclidis.

PROPOSITIO UNDECIMA.

Problema.

A puncto extra circulum dato rectam circuli tangentem ducere.

Ex dato puncto C ad centrum A circuli dati BLF ducatur recta CA. Atque centro A, intervallo CA, deſcribatur circulus EIC. Deinde ſupra CA, & ex puncto L, in quo ſecat dati circuli peripheriam, erigatur perpendicularis LE (Propoſ. 13. Libri 2.), quæ circuli EIC peripheriam alicubi ſecet, ut in puncto E, a quo ducatur radius EA, & ex puncto F, in quo ſecat peripheriam dati circuli, ad punctum datum C ducatur recta FC, quæ erit tangens quæſita. Fig. III. Tab. X.

Demonſtratio.

Duo triangula EAL, CAF circa angulum communem A, habentes latera LA, AE æqualia lateribus FA, AC (Defin. 15. Lib. 2.); ideoque (Propoſ. 6. Libri 2.) erit angulus AFC æqualis angulo ALE recto per conſtructionem; conſequenter etiam angulus AFC erit rectus. Ergo recta FC perpendicularis extremitati diametri, ſeu radii AF, erit circuli tangens (Cor. 1. Prop. 6.) Quod erat propoſitum.

Hæc Propoſitio poteſt etiam alia ratione demonſtrari. Ex puncto R ad centrum C ducatur recta RC; quæ (Prop. 12. Libri 2.) bifariam ſecetur in A, atque centro A, intervallo AC, vel AR, deſcribatur ſemicirculus CGBR, & ex puncto G, in quo peripheriæ ſe mutuo ſecant ad punctum datum R ducatur recta GR, quæ erit tangens quæſita.

Demonſtratio.

Nam ducto radio CG, angulus CGR in ſemicirculo CGBR inſcriptus (Propoſ. anteced.) eſt rectus; ideoque recta GR perpendicularis extremitati G radii CG (Coroll. 1. Propoſ. 6.) erit tangens circuli LGM. Quod erat demonſtrandum.

Eſt Propoſitio 17. Libri 3. Euclidis.

Corollarium.

Si ex centro A radio AC deſcribatur alius ſemicirculus CLR, & ducatur recta LR, eodem modo demonſtrabitur ipſam rectam LR eſſe circuli tangentem. Conſequenter ex dato puncto duæ circuli tangentes duci poſſunt.

PROPOSITIO DUODECIMA.

Theorema.

Angulus contentus a circuli tangente, & a chorda per punctum contactus ducta, æqualis eſt angulo deſcripto in oppoſita, ſeu alterna circuli portione.

Fig. IV. Tab. X. Recta AB circulum tangat in puncto C, a quo ducta ſit ſecans chorda CE, erit angulus ECB a tangente CB, & a ſecante CE contentus, æqualis angulo inſcripto in ſegmento, ſeu portione oppoſita CRFE. Similiter erit angulus ACE æqualis angulo contento in portione CILE.

Ducatur diameter CF, quæ erit perpendicularis tangenti AB (Coroll. 2. Propoſ. 6.) Ducantur etiam chordæ FE, EL, LC.

Demonſtratio.

Angulus in ſemicirculo inſcriptus eſt rectus (Propoſ. 10.); ergo in triangulo EFC reliqui duo anguli EFC, ECF ſimul ſumpti unum rectum adæquant (Coroll. 5. Propoſ. 24. Libri 2.). Sed duo anguli ECB, ECF adæquant pariter angulum rectum FCB (Axiom. 10.); ideoque (Axiom. 1.) duo anguli EFC, ECF æquales erunt duobus angulis ECB, ECF; atque dempto communi angulo ECF, (Axiom. 3.) remanebit angulus EFC contentus in ſegmento EFRC æqualis angulo ECB contento a tangente CB, & a chorda ſecante CE.

Præterea in quadrilatero CLEF duo anguli oppoſiti CFE, CLE (Propoſ. 9.) adæquant duos rectos; ſed duo anguli conſequentes ECB, ECA ſunt pariter æquales duobus angulis rectis (Propoſ. 15. Libri 2.); ideoque erunt duo anguli CFE, CLE æquales duobus

angu-

a ſecante CB. Quod erat demonſtrandum.
Eſt Propoſitio 32. Libri 3. Euclidis.

Corollarium.

Hinc evidens eſt angulum CFE inſcriptum in majori ſegmento CRFE acutum eſſe; & angulum CLE contentum in minori ſegmento CILE obtuſum eſſe.
Eſt ſecunda pars Propoſit. 31. Libri 3. Euclidis.

PROPOSITIO DECIMATERTIA.

Theorema.

In circulis æqualibus, vel in eodem circulo, anguli æquales, ſive ad centra, ſive ad peripherias conſtituti, inſiſtunt ſupra arcus æquales.

Viciſſim ſi arcus ſunt æquales, anguli inſiſtentes, ſive ad centra, ſive ad peripherias erunt æquales.

Primo in æqualibus circulis AMBL, ERGF, ſint anguli æquales ACB, EIG ad centra C, & I; arcus oppoſiti AMB, ERG erunt inter ſe æquales. Fig. V. Tab. X.

Demonſtratio Primæ Partis.

Intelligatur circulus ALBM ita ſuperimponi circulo EFGR, ut radius CA cadat ſupra æqualem radium EI (Defin. 3.), congruent (Coroll. Defin. 5. Libri 2.), radius vero CB congruet cum radio GI, quia anguli ACB, EIG ſunt ex hypotheſi æquales; atque puncta A, & B cadent in C, & G; ideoque integer arcus AMB congruet cum arcu ERG, & (Axiom. 8.) erunt inter ſe æquales.
Si autem æquales fuerint anguli ALB, EFG ad peripherias, tunc ductis radiis CA, CB, IE, IG, etiam anguli ACB, EIG ad centra (Axiom. 13.) æquales erunt, quia ſunt dupli angulorum æqualium ad peripherias (Propoſ. 7.); conſequenter ex demonſtratis etiam arcus oppoſiti AMB, ERG æquales erunt inter ſe, Quod erat primo demonſtrandum.
Eſt Propoſitio 26. Libri 3. Euclidis.
Secundo in circulis æqualibus ALB, EFG ſecti ſint arcus æquales AMB, ERG; anguli inſiſtentes, ſive ad centra, ſive ad peripherias, erunt æquales.

Demonſtratio Secundæ Partis.

Quoniam (hypotheſ.) arcus AMB eſt æqualis arcui ERG, & circuli ſunt æquales, ideo ſuperimpoſito circulo AMBL ſupra æqualem circulum ERGF, ita ut centra C, & I conveniant, & punctum A cum puncto E, arcus AMB congruet cum æquali arcu ERG, & punctum B cadet in G; conſequenter congruent radii CA cum IE, & CB cum IG, atque (Axiom. 14.) angulus ACB erit æqualis angulo EIG.

Præterea (Axiom. 14.) etiam æquales erunt inter ſe anguli ALB, EFG ad peripherias, quia (Propoſ. 7.) ſunt medietates angulorum æqualium ACB, EIG ad centra. Quod erat ſecundo demonſtrandum.

Eſt Propoſitio 27. Libri 3. Euclidis.

PROPOSITIO DECIMAQUARTA.

Theorema.

Fig. VI. Tab. X. *In circulis æqualibus (AMCL, ERGI), vel in eodem circulo, æquales chordæ (AC, EG) arcus æquales (ALC = EIG, & AMC = ERG) ſubtendunt.*

Viciſſim ſi arcus (ALC, AIG) fuerint æquales, etiam chordæ (AC, EG) eoſdem arcus ſubtendentes erunt inter ſe æquales.

Demonſtratio Primæ Partis.

Ductis radiis (Definit. 3. hujus Libri, & Defin. 15. Libri 2.) æqualibus inter ſe BA, BC, FE, FG, quia (hypoth.) baſes AC, EG ſunt æquales, ideo (Propoſ. 9. Libri 2.) erit angulus ABC = EFG; conſequenter (prima parte Propoſ. anteced.) erit arcus ALC = EIG; & ab integris æqualibus peripheriis auferendo partes æquales ALC, EIG, (Axiom. 3.) remanebit arcus AMC = ERG. Quod erat primum.

Eſt Propoſitio 28. Libri 3. Euclidis.

Demonſtratio Secundæ Partis.

Quoniam (hypoth.) arcus ALC, EIG ponuntur æquales, ideo ductis radiis BA, BC, FE, FG (ſecunda parte Propoſ. anteced.) erit angulus ABC = EFG, & (Defin. 3.) latera BA, BC ſunt æqualia lateribus FE, FG; ergo (Propoſ. 6. Libri 2.) erit baſis AC æqualis baſi EG: conſequenter æquales arcus ab æqualibus chordis ſubtenduntur. Quod erat oſtendendum.

Eſt Propoſitio 29. Libri 3. Euclidis.

PRO-

PROPOSITIO DECIMAQUINTA.

Problema.

Datum arcum (ACL) biſariam dividere. Fig. VII. Tab. X.

Ducatur chorda AL, quæ (Propoſ. 12. Libri 2.) biſariam ſecetur in B, & (Propoſ. 13. Libri 2.) erigatur perpendicularis BC, quæ biſariam ſecabit in C datum arcum ACL. Jungantur rectæ AC, CL.

Demonſtratio.

Triangula ABC, CBL circa æquales angulos rectos ABC, CBL habent latus CB commune, & (conſtruct.) latus BA = BL; ergo (*Propoſ. 6. Libri 2.*) erit AC = CL; proindeque (prima parte Propoſ. anteced.) arcus CMA, CRL ſubtenti ab æqualibus chordis AC, CL erunt æquales inter ſe. Quod erat faciendum, atque demonſtrandum.

Eſt Propoſitio 30. Libri 3. Euclidis.

PROPOSITIO DECIMASEXTA.

Problema.

Ex dato circulo portionem abſcindere, quæ contineat angulum æqualem dato angulo rectilineo.

Reſolutio.

Ducatur recta CB, quæ datum circulum tangat in aliquo puncto C (Propoſit. 6.), & ſupra eandem CB in puncto C fiat angulus BCI æqualis angulo dato A (Propoſ. 10. Libri 2.), Portio CRI continebit angulum æqualem angulo ICB (Propoſ. 12.); conſequenter (Axiom. 1.) æqualem dato angulo A. Quod erat propoſitum. Fig. X. Tab. X.

Eſt Propoſitio 34. Libri 3. Euclidis.

PROPOSITIO DECIMASEPTIMA.

Theorema.

In quovis circulo (ALBC) ſi duæ rectæ (AB, CL) a peripheria utrinque terminatæ ſe mutuo ſecent (ut in F), rectangulum contentum ex partibus (AF, FB) unius, erit æquale rectangulo contento a partibus (CF, FL) alterius rectæ (nimirum erit AF × FB = CF × FL. Fig. VIII. Tab. X.

Demonſtratio.

Nam ductis rectis AC, LB, eſt angulus AFC = LFB (Propoſ. 17.

poſ. 17. Libri 2.), & (Propoſ. 8. hujus Libri) eſt angulus CAB = CLB, quia inſiſtunt ſupra eundem arcum CB. Similiter eſt angulus ACL = ABL; ideoque triangula AFC, BLF ſunt æquiangula: conſequenter (Propoſ. 7. Lib. 3.) erit AF : FL : : FC : FB; atque (Propoſ. 1. Lib. 2.) erit AF × FB = FL × FC. Quod erat demonſtrandum.

Eſt Propoſitio 35. Libri 3. Euclidis.

PROPOSITIO DECIMAOCTAVA.

Theorema.

Si ex quolibet puncto & extra circulum ducantur duæ rectæ, quarum una circulum tangat, & altera circulum utcumque ſecet; ſemper erit quadratum tangentis æquale rectangulo contento a tota ſecante, & ab ejus parte extra circulum poſita.

Fig. IX. Tab. X. Sit circulus BICL, quem tangat recta AL in puncto L, eumque ſecet recta AB, ſemper erit quadratum tangentis AL æquale rectangulo contento a ſecante BA, & ab ejus ſegmento CA extra circulum poſito; nimirum erit $\overline{AL}^2$ = □ BA × AC.

Ducantur ſubtenſæ BL, CL.

Demonſtratio.

Angulus CLA contentus a tangente LA, & a chorda ſecante LC (Propoſ. 12.) eſt æqualis angulo LBC inſcripto in altero ſegmento, angulus vero in A communis eſt duobus triangulis ALB, ALC; ideoque (Coroll. 7. Propoſ. 24. Libri 2.) reliquus angulus BLA erit æqualis reliquo ACL: proindeque triangula ALB, ALC erunt æquiangula, & (Propoſ. 7. Lib. 3.) erit BA : AL : : AL : AC, ſcilicet erit ∺ BA : AL : AC. ergo (Prop. 23. Libri 1.) erit $\overline{AL}^2$ = BA × AC. Quod erat oſtendendum.

Eſt Propoſitio 36. Libri 3. Euclidis.

Corollarium I.

Ergo tangens AL eſt media proportionalis inter ſecantem BA, & ejus ſegmentum CA poſitum extra circulum: eſt enim ∺ BA : AL : AC.

Corollarium II.

Si ex eodem puncto A (Coroll. Propoſ. 11.) ducatur altera tangens AI, eodem modo demonſtrabitur eſſe $\overline{AI}^2$ = BA × AC; ideoque (Axiom. 1.) erit $\overline{AL}^2$ = $\overline{AI}^2$, & (Algebr.) habebitur AL = AI:

PROPOSITIO DECIMANONA.

Problema.

Datam rectam terminatam (A B) ita in duas partes dividere, ut tota ad partem majorem eandem rationem habeat, quam habebit eadem pars major ad minorem. Quod dicitur rectam lineam media, & extrema dividere ratione. Fig. XI Tab. X.

Supra datam AB, & ex puncto A (Propoſ. 13. Libri 2.) erigatur perpendicularis AC æqualis medietati rectæ A B. Deinde centro C, radio CA deſcribatur circulus AEM, atque per puncta B, & C ducatur recta BCM. Tandem ex data AB ſecetur portio BL æqualis portioni BE: dico rectam AB media, & extrema ratione diviſam eſſe in L; ſcilicet erit ∺ AB : BL : LA.

Demonſtratio.

Radius CA (conſtructione) eſt dimidium rectæ BA; item CA (Defin. 15. Lib. 2.) eſt dimidium diametri EM; ideoque (Axiom. 13.) erit recta BA æqualis diametro ME; ſed recta BA (conſtructione) perpendicularis extremitati A radii AC (Coroll. 1. Propoſ. 6.) eſt tangens circuli, & linea BM eſt circuli ſecans: unde (Corollar. 1. Propoſ. anteced.) erit MB : BA : : BA : BE, & dividendo (Propoſ. 7. Lib. 1.) erit MB — BA : BA : : BA — BE : BE; ſed (Demonſtr.) eſt EM = BA, (conſtruct.) eſt BL = BE; ideo æqualibus æqualia ſubſtituendo in antecedenti ultima proportione, erit MB — EM : BA : : BA — BL : BL; at BA — LB ſignificat AL, & MB — EM ſignificat BE, cui ſubſtituatur æqualis portio BL, & habebitur BL : BA : : AL : BL; & invertendo (Propoſ. 5. Lib. 1.) erit BA : BL : : BL : AL, ſcilicet ∺ BA : BL : AL. Ergo recta AB diviſa eſt in L media, & extrema ratione. Quod erat propoſitum.

Eſt Propoſitio 30. Libri 6. Euclidis.

Corollarium.

Quoniam (Demonſtratione) eſt ∺ BA : BL : AL, ideo (Propoſ. 23. Libri 1.) erit $BA \times AL = \overline{BL}^2$; ergo data recta AB ita diviſa eſt in L, ut rectangulum ex tota AB in partem AL adæquet quadratum reliquæ partis BL.

Eſt Propoſitio 11. Libri 2. Euclidis.

PRO-

PROPOSITIO VICESIMA.

Problema.

Fig. XII. Tab. X. *Datis duabus rectis (AB, BC) mediam proportionalem invenire.*

Datæ rectæ AB, BC ita in directum ponantur, ut unicam rectam AC conſtituant, quæ (Propoſ. 12. Lib. 2.) ſecetur bifariam in F; & centro F, radio FA, vel FC deſcribatur ſemicirculus ALMC; poſtea ex puncto B ad rectam AC (Propoſ. 13. Lib. 2.) erigatur perpendicularis BM, quæ alicubi terminetur a peripheria, ut in M: erit BM quæſita linea.

Demonſtratio.

Ductis ſubtenſis AM, CM angulus AMC in ſemicirculo ALMC inſcriptus (Propoſit. 10.) erit rectus; ergo (Coroll. 2. Propoſ. 18. Libri 3.) perpendicularis MB demiſſa ab angulo recto ad hypothenuſam AC erit media proportionalis inter ſegmenta AB, BC ejuſdem hypothenuſæ: erit igitur ∺ AB : BM : BC. Quod erat propoſitum.

Eſt Propoſitio 13. Libri 6. Euclidis.

Corollarium I.

Ergo (Propoſit. 23. Libri 1.) erit $AB \times BC = \overline{BM}^2$. Scilicet in quovis circulo quadratum cujuſvis perpendicularis BM a peripheria ad diametrum ductæ æquale erit rectangulo comprehenſo a diametri partibus AB, BC, in quibus ab ipſa perpendiculari dividitur.

Corollarium II.

Fig. XIII. Tab. X. Quapropter ut deſcribatur quadratum æquale dato rectangulo ABCR, lateribus AB, BC inveniatur media proportionalis BL, ſupra quam (Propoſ. 30. Libri 2.) fiet quadratum BM, quod (Propoſit. 23. Lib. 1.) æquale erit rectangulo ABC contento a lateribus AB, BC.

Corollarium III.

Ut autem deſcribatur quadratum æquale parallelogrammo obliquangulo ABST, demittantur perpendiculares AR, BC, & (Propoſit. 31. Libri 2.) habebitur rectangulum ABCR æquale parallelogrammo obliquangulo ABST; unde quadratum BM (Coroll. antec.) æquale rectangulo ABCR (Axiom. 1.) erit etiam æquale parallelogrammo obliquangulo ABST.

Corol-

Ergo data qualibet figura rectilinea, deſcribetur quadratum æquale ipſi figuræ, ſi dividatur eadem figura in triangula, deinde unicuique triangulo (Propoſ. 34. Lib. 2.) fiat rectangulum æquale; poſtea (anteced. Coroll. 2.) unicuique rectangulo deſcribatur quadratum æquale. Tandem (Propoſ. 20. Libri 3.) inveniatur linea, cujus quadratum ſit æquale omnibus inventis quadratis ſimul ſumptis; & quadratum illud (Axiom. 1.) erit æquale rectilineo dato.

In hoc Corollario continetur Propoſitio 14. Libri 2. Euclidis.

PROPOSITIO VICESIMAPRIMA.

Theorema.

Si recta (AB) bifariam ſecetur (in C), eique in directum addatur qualibet alia recta (BL), quadratum lineæ (CL) dimidiæ cum adjecta, erit æquale rectangulo (AL × LB) contento ex data cum adjecta (AL), & ab adjecta (BL) cum quadrato dimidiæ (CB). Fig. XIV. Tab. X.

Centro C, radio CB, vel CA, deſcribatur circulus AFB, & ex puncto L (Propoſit. 11.) ducatur tangens LF, & ducatur radius CF ad punctum contactus F.

Demonſtratio.

Recta LF (Conſtructione) eſt circuli tangens, & AL circulum ſecat; ideo (Propoſ. 18.) erit $\overline{LF}^2 = AL \times LB$. Addantur quadrata æqualia radiorum CF, CB, & (Axiom. 2.) erit $\overline{LF}^2 + \overline{CF}^2 = AL \times LB + \overline{CB}^2$. Sed (Coroll. 1. Propoſ. 6.) angulus CFL eſt rectus, & proinde (Coroll. 1. Propoſ. 19. Lib. 3.) erit $\overline{LF}^2 + \overline{CF}^2 = \overline{CL}^2$: ergo (Axiom. 1.) erit $\overline{CL}^2 = AL \times LB + \overline{CB}^2$. Quod erat demonſtrandum.

Eſt Propoſitio 6. Libri 2. Euclidis.

PROPOSITIO VICESIMASECUNDA.

Theorema.

Si recta linea (AB) dividatur bifariam (in C), & non bifariam (in L); erit triangulum (AL×LB) contentum a partibus inæqualibus (AL, LB) una cum quadrato intermediæ (CL) ſemper æquale quadrato dimidiæ (CA, vel CB). Fig. XV. Tab. X.

Deſcribatur ſemicirculus AIB, & ad diametrum AB erigatur perpendicularis LI, ducaturque radius CI.

Demonſtratio.

Etenim (Coroll. 1. Propoſ. 20.) eſt $AL \times LB = \overline{LI}^2$; addatur utrinque quadratum intermediæ LC, & (Axiom. 2.) erit $AL \times LB + \overline{LC}^2 = \overline{LI}^2 + \overline{LC}^2$. Sed (Coroll. 1. Propoſ. 19. Lib. 3.) in triangulo rectangulo CLI eſt $\overline{CI}^2 = \overline{LI}^2 + \overline{LC}^2$; ergo (Axiom. 1.) erit $AL \times LB + \overline{LC}^2 = \overline{CI}^2$; at eſt $\overline{CI}^2 = \overline{CB}^2 = \overline{CA}^2$, quia CI, CB, & CA ſunt radii; conſequenter (Axiom. 1.) erit $AL \times LB + \overline{LC}^2 = \overline{CB}^2$, vel $= \overline{CA}^2$. Quod erat oſtendendum.

Eſt Propoſitio 5. Libri 2. Euclidis.

PROPOSITIO VICESIMATERTIA.

Theorema.

Fig. 1. Tab. XI. *Si qualibet recta terminata (AB) dividatur utcumque (in C), quadratum totius (AB) æquale erit quadratis partium (AC, CB) una cum duplo rectangulo ab ipſis partibus contento. (erit nempe $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 + AC \times CB + AC \times CB$.*

Recta AB bifariam ſecetur in F, & deſcribatur ſemicirculus AR IB; deinde erigatur perpendicularis CI, & ducantur ſubtenſæ IA, IB.

Demonſtratio.

Angulus AIB in ſemicirculo inſcriptus (Propoſ. 10.) eſt rectus; ideo (Coroll. 2. Propoſ. 18. Lib. 3.) erit $\div AC : CI : CB$, conſequenter (Propoſit. 23. Libri 1.) erit rectangulum $AC \times CB = \overline{CI}^2$. Sed in triangulis rectangulis ABI, ACI, & BCI (Coroll. 1. Propoſ. 19. Lib. 3.) eſt $\overline{AB}^2 = \overline{AI}^2 + \overline{BI}^2$, & $\overline{AI}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CI}^2$, & $\overline{BI}^2 = \overline{CI}^2 + \overline{BC}^2$; ideoque (Axiom. 1.) erit $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CI}^2 + \overline{CI}^2 + \overline{BC}^2$, & ſubſtituendo pro $\overline{CI}^2$ æquale rectangulum $AC \times CB$, erit $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + AC \times CB + AC \times CB + \overline{BC}^2$. Quod erat demonſtrandum.

Eſt Propoſitio 4. Libri 2. Euclidis.

Corollarium.

Si recta AB bifariam ſecta fuerit a puncto C, tunc duo quadrata partium æqualium AC, CB erunt æqualia inter ſe, & duo rectangula ex AC in æqualem rectam CB, erunt ſingula æqualia quadrato unius

PROPOSITIO VICESIMAQUARTA.

Theorema.

Si in aliquo triangulo (ABC) quadratum unius lateris (AC) fuerit æquale quadratis reliquorum laterum (AB , BC) , angulus (ABC) a reliquis lateribus contentus erit rectus. Fig. II. Tab. XI.

Supra latus AB erigatur perpendicularis $BE = BC$, & ducatur AE.

Demonſtratio.

In triangulo rectangulo ABE (Coroll. 1. Propoſ. 29. Lib. 3.) eſt $\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BE}^2$; ſed eſt $\overline{BE}^2 = \overline{BC}^2$ (conſtruct.) , ideoque ſubſtituendo $\overline{BC}^2$ pro $\overline{BE}^2$, erit $\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$. At ex hypotheſi eſt $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$; ergo (Axiom. 1.) erit $\overline{AE}^2 = \overline{AC}^2$, & conſequenter erit $AE = AC$. Itaque duo triangula ABE, ABC habentia latus AB commune , & (conſtruct.) latus $BE = BC$, & (Demonſtrat.) latus $AE = AC$, (Propoſit. 9. Libri 2.) habebunt angulum $ABE = ABC$; atqui angulus ABE (conſtruct.) eſt rectus , ideo (Axiom. 1.) etiam angulus ABC erit rectus , & triangulum ABC erit rectangulum . Quod erat oſtendendum.

Eſt Propoſitio 48. Libri 1. Euclidis.

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ
LIBER QUINTUS.
DEFINITIO PRIMA.

F*Iguræ regulares*, ſeu *polygona regularia* ſunt, quæ habent omnes angulos æquales, & omnia latera æqualia: ut quodlibet triangulum æquilaterum, vel quodlibet quadratum eſt figura regularis.

Corollarium.

Ergo omnia polygona regularia habentia eundem numerum laterum (Definit. 1. Lib. 3.) erunt ſimilia inter ſe.

Definitio II.

Figura rectilinea circulo inſcripta dicitur, vel circulus figuræ circumſcriptus vocatur, quando ſingulorum figuræ angulorum vertices in peripheria circuli reperiuntur.

Corollarium.

Itaque polygonum regulare circulo inſcriptum erit, ſi diviſa integra peripheria in partes, ſeu arcus æquales, ducantur chordæ eoſdem arcus ſubtendentes, quæ (ſecunda parte Prop. 14. Lib. 4.) erunt æquales inter ſe; & anguli ab iiſdem chordis contenti (ſecunda parte Propoſ. 13. Lib. 4.) erunt etiam inter ſe æquales.

Definitio III.

Figura rectilinea circulo circumſcripta, vel circulus figuræ inſcriptus vocatur, cum ſingula figuræ latera circulum tangunt.

Definitio IV.

Centrum polygoni regularis idem eſt ac centrum circuli eidem polygono circumſcripti, vel inſcripti.

Perpendicularis vero ex centro ad latus polygoni, ſeu ad circuli chordas ducta, appellatur *Cathetus*, vel *Radius rectus*.

Definitio V.

Fig. VI. Tab. XI. Superficies, ſeu area terminata a duabus circumferentiis duorum circulorum concentricorum dicitur *Armilla*, vel *Zona*, vel *Corona*. Exceſſus vero radii majoris circuli ſupra radium minoris, appellatur *Latitudo coronæ*, ſeu *zonæ*.

De-

Definitio VI.

Figuræ *Hiſoperimetra* dicuntur illæ, quæ habent perimetros æquales (Defin. 13. Libri 2.), cum nempe ſumma laterum unius adæquat ſummam laterum alterius figuræ.

Definitio VII.

Arcus ſimiles circulorum ſunt illi, qui habent eandem rationem ad integras peripherias, ſive in quibus inſcribuntur anguli æquales.

Definitio VIII.

Portiones, vel *ſegmenta* circuli ſimilia dicuntur illa, quorum arcus ſunt ſimiles, ſcilicet quæ continent angulos æquales. Exempli grat. omnes ſemicirculi ſunt ſimiles, quia omnes anguli in ſemicirculis inſcripti (Propoſ. 10. Lib. 4.) ſunt recti, proindeque æquales; ſeu quia eandem rationem habet quilibet ſemicirculus ad ſuum integrum circulum, quam alius ſemicirculus ad ſuum integrum circulum.

PROPOSITIO PRIMA.

Theorema.

Si ex centro (C) circulorum concentricorum (ABEFG, HILMS) ducantur quotcumque radii (CA, CB, CE, CF, CG) ſecantes utramque peripheriam, & ducantur etiam chordæ (AB, BE, EF, FG, GA; HI, IL, LM, MS, SH), polygona (ABEFG, HILMS) in iiſdem circulis inſcripta ſimilia erunt. Fig. III. Tab. XI.

Demonſtratio.

Duo triangula ACB, HCI circa angulum communem in C habent latera proportionalia AC : CB : : HC : CI, quia (Defin. 15. Lib. 2.) ſunt AC = CB, & HC = CI; ideoque (Propoſ. 9. Libri 3.) ſimilia erunt ipſa triangula; erit igitur angulus CAB = CHI, angulus CBA = CIH, & AB : HI : : BC : CI, vel : : AC : CH. Similiter in triangulis BCE, ICL demonſtratur angulus CBE = CIL, CEB = CLI, & BE : IL : : BC : CI, vel : : EC : CL; conſequenter (Axiom. 2.) erit totus angulus ABE æqualis angulo HIL, & (Axiom. 2.) AB : HI : : BE : IL. Eodem ratiocinio demonſtratur angulus BEF = ILM, angulus EFG = LMS, FGA = MSH &c, & BE : IL : : EF : LM : : FG : MS : : GA : SH : : AB : HI; proindeque (Defin. 1. Lib. 3.) duo polygona ILMSH, FGABE erunt ſimilia. Quod erat demonſtrandum.

Co-

Corollarium I.

Si anguli ad centrum, ſcilicet ACB, BCE, ECF &c. fuerint omnes æquales inter ſe; tunc arcus oppoſiti (prima parte Prop. 13. Lib. 4.) erunt æquales inter ſe; & chordæ eoſdem arcus ſubtendentes (ſecunda parte Propoſ. 14. Lib. 4.) erunt etiam æquales inter ſe: ideoque polygona erunt regularia æqualia, & ſimilia.

Corollarium II.

Quapropter anguli ad centra ſimilium polygonorum regularium erunt æquales inter ſe.

Corollarium III.

Fig. IV. Tab. XI. Si autem ex centro C ad ſingula puncta peripheriæ ABEFG ducantur radii CA, CB, CE &c, ipſi continebunt angulos in C æquales inter ſe, & indefinite parvos. Præterea ſi ductæ concipiantur rectæ lineæ connectentes extrema eorumdem radiorum, ipſæ lineæ erunt pariter infinite parvæ, & æquales inter ſe, & cum peripheria coincident, atque conſtituent polygonum regulare infinitorum laterum. Similiter ſi ductæ intelligantur rectæ conjungentes puncta, in quibus prædicti radii ſecant peripheriam circuli HILMS, etiam ipſæ rectæ erunt infinite parvæ, & æquales, & cum peripheria coincident, & conſtituent aliud polygonum regulare infinitorum laterum; atque (Demonſtrat. anteced.) ſimile alteri polygono. Ergo *circuli ſunt polygona regularia ſimilia infinitorum laterum.*

PROPOSITIO SECUNDA.

Theorema.

Fig. V. Tab. XI. *Similes figuræ regulares (ABEFG, LMKRS) in circulis inſcriptæ ſunt inter ſe ut quadrata radiorum (AC, LI), vel cathetorum (CX, IZ), vel diametrorum.*

Demonſtratio.

In triangulis iſoſcelibus ACB, LIM anguli ACB, LIM (Coroll. 2. Prop. anteced.) ſunt æquales inter ſe, & (Coroll. 2. Propoſ. 25. Libri 2.) bifariam ſecantur a perpendicularibus CX, IZ; ideoque triangula ACX, LIZ (Axiom. 9.) habent angulum ACX = LIZ, & (Axiom. 16.) angulum AXC = LZI, & (Corollar. 7. Prop. 24. Lib. 2.) reliquum angulum XAC = ZLI; ergo (Prop. 9. Lib. 3.) erit AC : LI : : AX : LZ : : CX : IZ. Sed (Coroll. 2. Propoſ. 25. Lib. 2.) AX eſt dimidium rectæ AB, & LZ

eſt

eſt dimidium rectæ LM, proindeque (Propoſ. 11. Lib. 1.) erit AC : LI : : CX : IZ : : AB : LM; atque (Coroll. 1. Prop. 22. Lib. I.) habebitur $\overline{AC}^2 : \overline{LI}^2 :: \overline{CX}^2 : \overline{IZ}^2 :: \overline{AB}^2 : \overline{LM}^2$. Atqui (Propoſ. 16. Lib. 3.) polygona ſimilia ABEFG, LMKRS ſunt inter ſe ut quadrata laterum homologorum AB, LM, ideſt ſicuti $\overline{AB}^2 : \overline{LM}^2$; ergo (Axiom. 1.) erunt etiam inter ſe ut quadrata cathetorum CX, IZ, vel radiorum AC, LI, ſive ut quadrata diametrorum, quia (Propoſ. 11. Lib. 1.) diametrorum ratio æqualis eſt rationi radiorum: radii namque ſunt medietates diametrorum. Ergo ſimiles figuræ regulares &c. Quod erat oſtendendum.

Eſt Propoſitio 1. Libri 12. Euclidis.

Corollarium I.

Quoniam (*hypotheſ.*) eſt *AB* : *LM* : : *BE* : MK : : EF : KR, & (*Demonſtrat.*) eſt AB : LM : : AC : *LI* : : CX : IZ; ideo latera ſimilium polygonorum regularium in circulis inſcriptorum erunt inter ſe in ratione radiorum, ſive diametrorum, vel cathetorum.

Corollarium II.

Præterea, quia (hypotheſ.) habemus AB : LM : : BE : MK : : EF : KR : : FG : RS : : GA : SL, ideo colligendo (Prop. 12. Lib. 1.) erit AB : LM : : AB + BE + EF + FG + GA : LM + MK + KR + RS + SL. Eſt autem (Demonſtrat.) AB : LM : : AC : LI : vel : : CX : IZ; ergo perimetri polygonorum ſimilium in circulis inſcriptorum erunt inter ſe in ratione radiorum, ſeu diametrorum, vel cathetorum.

Corollarium III.

Quia omnes radii inter ſe, & omnia latera regularis polygoni in circulo inſcripti ſunt æqualia inter ſe, ideo etiam omnes catheti ejuſdem polygoni æquales erunt inter ſe.

Corollarium IV.

Similiter circuli erunt inter ſe in ratione duplicata, ſive ut quadrata radiorum, ſeu diametrorum, quia (Coroll. 3. Propoſ. 1.) ſunt polygona regularia ſimilia infinitorum laterum.

Eſt Propoſitio 2. Libri 12. Euclidis.

Corollarium V.

Peripheriæ vero circulorum, quia (Coroll. 3. Propoſ. 1.) ſunt perimetri polygonorum regularium, ideo (Coroll. 2.) erunt etiam inter ſe ut diametri, ſeu radii.

Co-

Corollarium VI.

Quoniam (Demonſtratione) circuli inter ſe, & polygona ſimilia in circulis inſcripta etiam inter ſe ſunt ut quadrata radiorum, ſeu diametrorum; ideo (Axiom. 1.) circuli erunt inter ſe ſicuti polygona ſimilia in ipſis inſcripta.

Corollarium VII.

Similes arcus circulorum (Definit. 7.) ſunt inter ſe ut integræ peripheriæ, & integræ peripheriæ (anteced. Coroll. 5.) ſunt inter ſe ut radii, vel diametri; ergo (Axiom. 1.) ſimiles arcus circulorum erunt inter ſe in ratione radiorum, ſeu diametrorum.

Corollarium VIII.

Quoniam (anteced. Coroll.4.) circuli ſunt inter ſe ut quadrata radiorum, ideo radius duplus deſcribit circulum quadruplum; radius triplus deſcribit circulum, qui novies continebit circulum deſcriptum a ſimplici radio &c.

PROPOSITIO TERTIA.

Theorema.

Fig. VI. Tab. XI. *Circulus (AEFM) eſt ad zonam (EIABLFM) ſibi inſcriptam ſicuti quadratum radii (AC) ejuſdem circuli ad rectangulum (AB × BF) contentum a latitudine (AB) zonæ, & a reliqua parte (BF) diametri (AF) ejuſdem circuli.*

Demonſtratio.

Diameter AF biſariam diviſa eſt in C, & non biſariam in B; ideoque (Propoſ. 22. Libri 4.) erit $\overline{AC}^2 = AB \times BF + \overline{BC}^2$; auferatur utrinque $\overline{BC}^2$, & (Axiom. 3.) remanebit $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = AB \times BF + \overline{BC}^2 - \overline{BC}^2$, ideſt (Algebr. n. 14.) $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = AB \times BF$.

Eſt autem circulus AEFM ad circulum BLI : : $\overline{AC}^2 : \overline{BC}^2$ (Prop. anteced.); & convertendo (Prop. 8. Libri 1.) erit circulus AEFM ad circulum AEFM — BLI : : $\overline{AC}^2 : \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$; ſed a circulo AEFM dempto circulo BLI, remanet zona, nimirum eſt AEFM — BLI = AIFMBE, & (Demonſtr.) eſt $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = AB \times BF$; ergo erit circulus AEFM ad zonam AIFMBE : : $\overline{AC}^2 : AB \times BF$: ſcilicet circulus erit ad zonam ſibi inſcriptam, ſicuti quadratum radii ad rectangulum contentum a diametri partibus. Quod erat oſtendendum.

Co-

Corollarium I.

Quoniam (Coroll. 4. Prop. 2.) alius quilibet circulus STU eſt ad Fig. VII. circulum AEFM : $\overline{RS}^2$: $\overline{AC}^2$, & eſt demonſtratis eſt circulus AEFM Tab. XI. ad zonam AIFMBE : : $\overline{AC}^2$: AB×BF, ideo ordinando (Propoſ. 18. Libri 1.) erit circulus STU ad zonam AIFMBE : : $\overline{RS}^2$: AB×BF: nimirum quilibet circulus eſt ad quamlibet zonam, ut quadratum ex radio ejuſdem circuli ad rectangulum comprehenſum a latitudine zonæ, & a reliqua parte diametri majoris circuli zonam conſtituentis.

Corollarium II.

Si ex puncto B ad diametrum AF erigatur perpendicularis BZ Fig. VI. (Coroll. 1. Propoſ. 20. Libri 4.), erit Tab. XI.
AB×BF = $\overline{BZ}^2$; ſed (Coroll. anteced.) eſt circulus STU ad zonam AIFMBE ſicuti $\overline{RS}^2$ ad rectangulum AB×BF, & ſubſtituendo $\overline{BZ}^2$ pro æquali rectangulo AB×BF, erit
STU : AIFMBE : : $\overline{RS}^2$: : $\overline{BZ}^2$; circulus vero STU (Coroll. 1. Propoſ. 2.) eſt ad circulum deſcriptum a radio BZ, ſicuti $\overline{RS}^2$ ad $\overline{BZ}^2$; ergo (Axiom. 1.) erit STU : AIFMBE : : STU ad circulum deſcriptum a radio BZ; conſequenter zona AIFMBE erit æqualis circulo deſcripto a recta BZ, quæ (Propoſ. 20, Libri 4.) eſt media proportionalis inter ſegmenta AB, BF diametri ejuſdem zonæ.

PROPOSITIO QUARTA.

Problema.

In dato circulo quadratum inſcribere.

Diametro AB ducatur alia diameter perpendicularis EF, & ductis Fig. ſubtenſis AE, EB, BF, FA, erit AFBE quæſitum quadratum. VIII. Tab. XI.

Demonſtratio.

Quatuor anguli ad centrum (Axiom. 16.) ſunt æquales; ideo (prima parte Propoſ. 13. Lib. 4.) arcus oppoſiti æquales erunt, & (ſecunda parte Prop. 14. Lib. 4.) chordæ AF, FB, BE, EA eoſdem arcus ſubtendentes erunt etiam æquales inter ſe. Anguli vero AFB, FBE, BEA, EAF (Prop. 10. Lib. 4.) ſunt omnes recti, quia in ſemicirculis inſcripti; ergo figura AEBF æquilatera, & rectangula, erit quadratum. Quod erat propoſitum.

Eſt Propoſitio 6. Libri 4. Euclidis.

tur in L, I, G, K, & ducantur ſubtenſæ AL, LE, EI, IG &c, inſcriptus erit Octogonus regularis in dato circulo.

Similiter ſi arcus ſubtenſi a lateribus octogoni bifariam dividantur, & ducantur ſubtenſæ, inſcripta erit in circulo figura ſexdecim laterum; atque ita procedendo deſcribentur figuræ laterum 32, 64, &c.

PROPOSITIO QUINTA.

Problema.

In dato circulo Hexagonum regulare inſcribere.

Fig. IX. Tab. XI. Centro quovis peripheriæ puncto F, & radio FC dati circuli deſcribatur alius circulus, vel arcus ACE ſecans peripheriam dati circuli in A, & E. Deinde ex punctis A, F, E ducantur diametri AM, FL, EB; poſtea ducantur ſubtenſæ FA, AB, BL, LM, ME, EF, & inſcriptum erit quæſitum hexagonum ABLMEF.

Demonſtratio.

Triangulum CFE contentum a radiis FC, FE, CE circulorum æqualium eſt æquilaterum, ideo (Coroll. 3. Prop. 25. Libri 2.) angulus ECF erit tertia pars duorum rectorum; ergo ejus menſura, ſcilicet arcus EF, erit tertia pars ſemicircumferentiæ EFAB, quæ (Coroll. Definit. 7. Lib. 4.) eſt menſura duorum rectorum. Similiter in triangulo æquilatero AFC angulus ACF eſt tertia pars duorum rectorum, & arcus AF ejus menſura erit alia tertia pars ſemiperipheriæ EFAB; conſequenter reliquus arcus AB erit reliqua tertia pars ſemicircumferentiæ, & angulus oppoſitus ACB erit etiam tertia pars duorum rectorum. Itaque (Axiom. 1.) tres anguli ECF, FCA, ACB erunt æquales, quibus etiam æquales ſunt anguli ad verticem oppoſiti BCL, LCM, MCE (Prop. 16. Libri 2.). Cum igitur ſex anguli ad centrum C ſint æquales; iccirco (prima parte Propoſ. 13. Lib. 4.) arcus oppoſiti æquales erunt, & (ſecunda parte Propoſ. 14. Lib. 4.) ſubtenſæ AB, BL, LM, ME, EF, FA etiam æquales erunt inter ſe. Præterea omnes anguli ABL, BLM, LME &c. (ſecunda parte Prop. 13. Libri 4.) ſunt æquales inter ſe, quia inſiſtunt ſupra arcus æquales AFEML, MEFAB &c; quilibet enim ex ipſis arcubus continet quatuor ſextas partes integræ peripheriæ. Quapropter hexagonum ABLMEF erit æquilaterum, & æquiangulum, ſcilicet regulare, & in circulo inſcriptum. Quod erat docendum, & demonſtrandum.

Eſt Propoſitio 15. Libri 4. Euclidis.

Co-

Itaque (conſtructione) latus hexagoni in circulo inſcripti eſt æquale radio ejuſdem circuli.

Corollarium II.

Si ducantur ſubtenſæ AE, AL, LE, triangulum inſcriptum EAL erit æquilaterum (ſecunda parte Prop. 14. Lib. 4.)

Quod ſi omnes arcus ſubtenſi a lateribus hexagoni bifariam dividantur, & ducantur chordæ, inſcriptum erit circulo polygonum regulare duodecim laterum.

PROPOSITIO SEXTA.

Problema.

Circa datum circulum polygonum circumſcribere dato polygono æquiangulum.

Producantur ſingula dati polygoni latera verſus unicam partem, & omnes anguli externi ACE, CBI &c. (Coroll. 10. Prop. 24. Lib. 2.) ſimul ſumpti quatuor rectis æquales erunt. Poſtea in dato circulo ducatur quilibet radius LH, & (Propoſ. 10. Lib. 2.) fiat angulus HLM æqualis angulo externo ACE. Item conſtituatur angulus MLS = FAB (& ita progrediendo, ſi data figura plures habuerit angulos), erit reliquus angulus CBI æqualis angulo SLH, quia omnes anguli, qui fieri poſſunt in C ſimul ſumpti (Coroll. 3. Prop. 15. Libri 2.) ſunt etiam æquales quatuor rectis. Deinde per puncta H, S, M(Propoſ. 6. Libri 4.) ducantur tangentes RZ, TZ, RT, quæ utrinque productæ concurrent, ut in Z, T, R; atque erit RTZ quæſita figura. Fig. X. & XI. Tab. XI.

Demonſtratio.

In figura quadrilatera ZHLM quatuor ejus anguli interni ſimul ſumpti (Coroll. 8. Prop. 24. Lib. 2.) adæquant quatuor rectos; duo autem anguli LMZ, LHZ (conſtructione) ſunt ambo recti; ideo reliqui duo HLM, HZM ſimul ſumpti, duobus rectis æquales erunt; ſcilicet (Axiom. 1.) æquales erunt duobus angulis ACE, ACB, qui etiam ſimul ſumpti (Prop. 13. Libri 2.) duos rectos adæquant. Ab æqualibus ſummis auferantur anguli (conſtruct.) æquales, HLM, ACE, & (Axiom. 3.) relinquetur angulus HZM, ſive TZR æqualis angulo ACB. Eodem ratiocinio demonſtratur angulus T = CAB, & angulus R = ABC, atque ita de reliquis, ſi data figura plures habuerit angulos. Itaque figura RTZ eſt æquiangula figuræ

ABC; ejus vero latera RZ, RT, TZ (Coroll. 1. Prop. 6. Lib. 4.) circulum tangunt in H, S, & M; ergo (Defin. 3.) figura RTZ circulo SHM circumſcripta eſt, & æquiangula figuræ datæ. Quod erat propoſitum.

In hac Propoſitione continetur Propoſitio 3. Libri 4. Euclidis.

Corollarium.

Si datum polygonum fuerit regulare (Defin. 1.), tunc etiam omnes anguli T, R, &c polygoni circulo circumſcripti (Axiom. 1.) erunt inter ſe æquales, & ductis rectis LT, LR &c, quia (Corollar. 2. Propoſ. 18. Lib. 4.) eſt tangens TS = TM, & radius SL = LM, & latus LT commune duobus triangulis STL, LTM; ideo (Propoſ. 9. Libri 2.) erit angulus LTS = LTM, ſcilicet angulus LTS erit dimidium integri anguli STM. Eadem ratione angulus LRS eſt dimidium anguli *HRS*; *conſequenter* (*Axiom. 9.*) erit angulus LTS = LRS: eſt autem (Axiom. 8.) angulus *LST* = LSR, ideoque (Coroll. 7. Prop. 24. Lib. 2.) reliquus angulus TLS erit æqualis reliquo SLR. Latus vero LS interceptum inter angulos æquales commune eſt duobus triangulis STL, SLR; ergo (Prop. 4. Lib. 2.) erit ST = SR. Eodem modo oſtenditur TM = MZ. Eſt autem TS = TM (Coroll. 2. Propoſ. 18. Libri 4.); iccirco (Axiom. 8.) erit TR = TZ. Similiter demonſtratur TR = RZ, & ſic de cæteris, ſi plura fuerint latera. Ergo ſi datum polygonum fuerit regulare, etiam polygonum circulo circumſcriptum erit regulare.

PROPOSITIO SEPTIMA.

Problema.

Fig. XI. Tab. XI. *In dato triangulo* (RTZ) *circulum inſcribere*.

Duo anguli RTZ, TRZ (Propoſ. 11. Lib. 2.) bifariam dividantur per rectas TL, RL, quæ alicubi (Corollar. 3. Propoſ. 24. Lib. 2.) ſe invicem ſecabunt, ut in L, ex quo puncto ad latera trianguli (Propoſ. 14. Libri 2.) demittantur perpendiculares LS, LM, LH. Tandem centro L, intervallo LS, vel LM &c. deſcribatur circulus, qui erit quæſitus.

Demonſtratio.

Etenim (conſtructione) eſt angulus STL = MTL, & (Axiom. 16.) angulus TSL = TML. Præterea (Corollar. 7. Propoſit. 24. Libri 2.) eſt angulus SLT = TLM, latus vero LT interpoſitum inter angulos æquales eſt commune triangulis LST, LMT; ideoque (Propoſ. 4. Libri 2.) erit LS = LM. Similiter de-

M, S, & circulus SMH erit dato triangulo RTZ inſcriptus, quia latera trianguli (conſtruct.) ſunt perpendicularia extremitatibus radiorum, & (Coroll. 1. Propoſ. 6. Libri 4.) circulum tangunt. Quod erat propoſitum.

Eſt Propoſitio 4. Libri 4. Euclidis.

Scholium.

Eodem modo inſcribitur circulus in quovis dato polygono regulari.

Corollarium I.

Hinc patet cathetos figurarum circulo circumſcriptarum, ſcilicet perpendiculares LH, LS, &c. æquales eſſe radio circuli inſcripti.

Corollarium II.

Præterea evidens eſt perimetrum cujuſvis figuræ circulo circumſcriptæ majorem eſſe perimetro, ſeu peripheria circuli inſcripti. Ex. cauſ. duæ rectæ TS, TM ſimul ſumptæ ſunt majores arcu intercepto SM: unde ſumma laterum RT, RZ, TZ erit major peripheria circuli SMH.

PROPOSITIO OCTAVA.

Theorema.

Area cujuslibet polygoni regularis eſt æqualis triangulo, cujus baſis adæquet perimetrum, & altitudo ſit æqualis catheto ejuſdem polygoni.

Ex centro C dati poligoni ducantur radii CA, CB, CE, CF, CG, polygonum diviſum erit in totidem triangula, quot erunt latera polygoni, quæ triangula erunt omnia æqualia inter ſe (Propoſit. 9. Lib. 2.), quia continentur a radiis æqualibus, & ab æqualibus polygoni regularis lateribus; proindeque integrum polygonum ABEFG toties continebit unum ex ipſis triangulis ACB, quot ſunt latera polygoni. Producatur AB verſus H, & fiat AH æqualis perimetro polygoni ABEFGA, nimirum AH toties contineat latus unum AB, quot ſunt latera polygoni. Ducatur CH, & cathetus CR. Fig. XIII. Tab. XI.

Demonſtratio.

Triangulum ACH (ſecunda parte Propoſ. 1. Lib. 3.) eſt ad triangulum ACB, ſicuti baſis AH ad baſim AB; ſed (conſtruct.) baſis AH

AH totidem vices continet baſim AB, quot ſunt polygoni latera; ergo etiam triangulum ACH toties continebit triangulum ACB (Corollar. Propoſ. 4. Lib. 1.), quot ſunt latera polygoni, proindeque (Axiom. 13.) erit polygonum ABEFG æquale triangulo ACH, cujus baſis AH æqualis eſt polygoni perimetro, & altitudo CR eſt cathetus ejuſdem polygoni. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

Ergo cujuſvis polygoni regularis area obtinebitur multiplicando dimidiam perimetrum in cathetum, vel integram perimetrum in dimidium catheti.

Corollarium II.

Circulus (Corollar. 3. Propoſ. 1.) eſt polygonum regulare infinitorum laterum, cujus latera *infinite parva cum peripheria* coincidunt, & catheti, ſeu perpendiculares ductæ a centro ad ipſa latera infinite parva, ſunt ipſimet radii. Itaque area cujuſvis circuli *EFB* æqualis eſt triangulo ABC, cujus baſis BC adæquat perimetrum, ſeu circumferentiam ejuſdem circuli, & altitudo ſit radius, vel æqualis radio A*B*. Fig. XII. Tab. XI.

Area vero trianguli ABC (Coroll. 2. Propoſ. 31. Lib. 2.) eſt æqualis dimidio producto ex altitudine AB in baſim BC; baſis vero BC adæquat peripheriam EFB, & AB eſt radius.

Quapropter area circuli æqualis erit dimidio rectangulo ex radio in peripheriam; ſive, quod idem eſt, adæquat rectangulum ex radio in medietatem peripheriæ, vel rectangulum ex dimidio radio in integram peripheriam. Conſequenter rectangulum ex radio in peripheriam erit duplum areæ circuli; & rectangulum ex diametro in peripheriam erit quadruplum areæ ejuſdem circuli.

Scholion I.

Si rectangulo ex dimidia peripheria in radium (quod ex demonſtratis circuli aream adæquat) inveniatur quadratum æquale (Corollar. 2. Propoſ. 20. Lib. 4.), quadratum illud (Axiom. 1.) æquale erit circulo dato; proindeque inventa eſſet circuli quadratura (nimirum quadratum dato circulo æquale), ſi Geometricam regulam *haberemus* inveniendi longitudinem peripheriæ, ideſt rectam lineam æqualem peripheriæ. Ratio autem Geometrica inveniendi hanc lineam, in qua comparanda tantam operam, atque ſtudium plurimi excellentiſſimi Geometræ poſuerunt, etiamnum latet: unde eſt Problema adhuc irreſolutum circuli quadraturam invenire.

Mechanice autem invenitur recta peripheriæ æqualis, ſi circulo filum circumvolvatur, vel circulus ipſe juxta regulæ, ſeu rectæ lineæ directionem revolvatur.

Scho-

tionis ab Archimede, aut ab aliis Clariſſimis Geometris inventas.

Si enim Diameter cujuſvis circuli dividatur in ſeptem partes æquales, ut Archimedes demonſtravit, ejus peripheria continebit fere viginti duas ex iiſdem partibus.

Accuratior, & vero proximior eſt regula tradita a Metio, nimirum poſita diametro partium 113, longitudo peripheriæ erit partium 355. circiter. Alias alii proximiores rationes invenerunt, & continuo inveniri poſſunt, ſed numeris multo majoribus contentas, quas brevitatis cauſſa omittimus, atque in praxi communi plus laboris ſunt, quam utilitatis.

Data igitur circuli diametro AB exemp. cauſſ. longitudinis unciarum 28, ut inveniatur peripheria, inſtituatur hæc proportio 7 : 22 : : 28 ad quartum terminum proportionalem, qui inveniatur per Regulam auream proportionum (Propoſit. 3. Libri 1.), & erit $\frac{22 \times 28}{7}$, ideſt $\frac{616}{7} = 88$, nimirum 88 unciarum erit longitudo peripheriæ ACBM. Fig. XIV. Tab. XI.

Si autem fiat proportio 113 : 355 : : 28 : $\frac{355 \times 28}{113}$, invenietur exactior longitudo peripheriæ unciarum $\frac{9940}{113}$, ideſt unciarum 87 $\frac{109}{113}$; ſed cum fractioni $\frac{109}{113}$ deficiant tantum $\frac{4}{113}$ partes, ut fiat $\frac{113}{113}$, ideſt 1; ideoque in praxi ſumitur peripheriæ longitudo unciarum 88, ut in antecedenti exemplo. Si autem data fuerit periheria unciarum 88, & quæratur diameter, tunc inſtituatur regula trium 22 : 7 : : 88 : $\frac{7 \times 88}{22}$, & invenietur diameter unciarum $\frac{616}{22}$, ideſt unciarum 28.

Vel fiat 355 : 113 : : 88 : $\frac{113 \times 88}{355}$, invenietur exactior diameter unciarum $\frac{9944}{355}$, nimirum unciarum, 28 $\frac{4}{355}$, quæ fractio $\frac{4}{355}$ in praxi ordinaria pro nihilo habetur, excedit enim octogeſimam octavam partem unius unciæ, ſed minor eſt octogeſima nona parte unius unciæ, quod pro nihilo reputatur. Itaque mechanice inventis, ut ſupra, peripheria & diametro cujuſvis circuli, per ea, quæ ante demonſtravimus, obtineri poteſt ſuperficies circuli multiplicando quartam diametri partem, ſeu medietatem radii in peripheriam, vel medietatem peripheriæ in radium, vel quartam peripheriæ partem in diametrum &c, ſemper enim habebitur idem productum. Sic in antecedenti exemplo area circuli ACBM erit $\frac{28}{4} \times 88 = 7 \times 88 = 616$; vel erit $\frac{88}{4} \times 28 = 22 \times 28 = 616$; vel erit $\frac{88}{2} \times 14 = 44 \times 14 = 616$ unciis quadratis.

PRO-

PROPOSITIO NONA.

Theorema.

Circulus eſt omnibus figuris regularibus ſibi hiſoperimetris major; ſive eſt omnium figurarum ſibi hiſoperimetrarum capaciſſima.

Demonſtratio.

Fig. XV. Tab. XI. Figura circulo circumſcripta non poteſt eſſe circulo hiſoperimetra, quia perimetros figuræ circumſcriptæ (Coroll. 2. Propoſ. 3.) major eſt peripheria circuli; ideoque figura ABCDE hiſoperimetra circulo FLGKM erit minor figura eidem circulo circumſcripta. Sed figuræ circulo circumſcriptæ cathetus eſt ipſemet radius circuli (Corollar. 1. Propoſ. 7.); proindeque cathetus SI figuræ circulo hiſoperimetræ erit minor radio SL. At circuli area (Cor. 2. Prop. antec.) obtinetur multiplicando radium SL in medietatem peripheriæ FLGKM, & polygoni regularis area (Corollar. 1. Propoſ. anteced.) invenitur multiplicando cathetum SI in medietatem perimetri ABCDE; eſt autem (Demonſtratione) radius SL ſemper major catheto SI; dimidia vero peripheria eſt æqualis medietati perimetri polygoni, quia (Hypotheſi) ſunt figuræ hiſoperimetræ; ergo rectangulum ex dimidia peripheria in radium majus erit rectangulo ex dimidia perimetro in cathetum: hoc eſt, circulus major erit polygono ſibi hiſoperimetro. Quod erat demonſtrandum.

ELE-

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ
LIBER SEXTUS.
De Solidorum Doctrina.
DEFINITIO PRIMA.

SOlidum, ſive *corpus*, ſeu figura *ſolida* eſt quantitas illa, quæ trinam extenſionem habet, longitudinem nempe, latitudinem, & altitudinem, ſive profunditatem; atque ejus termini ſunt plures ſuperficies planæ, vel unica ſuperficies curva, ſive partim a planis ſuperficiebus, partim a curvis terminatur. Sic Solidi, ſeu Corporis A L longitudo eſt A B, vel E M, vel F C: latitudo B C, vel A F: & altitudo, ſeu profunditas eſt A E, ſeu B M, vel C L, &c; atque continetur a ſex ſuperficiebus planis, nimirum a ſex parallelogrammis A B M E, B M L C, E M L I, A E I F, A B C F, I F C L. Fig. XVI. Tab. XI.

Definitio II.

Recta linea A C dicitur *recta ſuperpendicularis* ad planum S T M I, dum rectos & æquales angulos efficit cum ſingulis rectis lineis C B, C E, C F, C L in eodem plano ductis, quæ illam contingunt in puncto C. Fig. I. Tab. XII.

Definitio III.

Si recta linea A B oblique incidat ſupra planum S T, & ex puncto ſublimi A ducta ſit A C perpendicularis ad planum S T, & a puncto C ad punctum B ducatur in plano recta B C, angulus A B C appellabitur *inclinatio lineæ* A B ad punctum, ſive ad planum S T. Fig. II. Tab. XII.

Definitio IV.

Planum B K R C dicitur *perpendiculare*, vel *rectum* ad planum A M G L, ſi quælibet recta E I in plano B R perpendiculariter ducta ſupra rectam B C, (quæ eſt *communis ſectio* planorum) fuerit etiam perpendicularis ad planum ſubjectum A M G L. Fig. III. Tab. XII.

Definitio V.

Si in utroque plano A M G L, B K R C ex puncto I ad communem ſectionem B C erigantur perpendiculares E I, S I, & efficiant angulum E I S obliquum, tunc planum B K R C erit *obliquum* ſeu *incli-* Fig. IV. Tab. XII.

Definitio VI.

Plana parallela dicuntur, quæ in omnem partem producta numquam inter ſe conveniunt, ſed æqualibus intervallis ubique inter ſe diſtant.

Definitio VII.

Fig. V. Tab. XII. *Priſma* eſt figura ſolida contenta a duobus oppoſitis planis, ſeu polygonis ABC, EFL parallelis, æqualibus, atque ſimilibus, & a totidem parallelogrammis ABFE, AELC, BCLF, quot ſunt latera oppoſitorum planorum.

Dicitur *priſma triangulare*, quando oppoſita plana ſunt duo triangula, ut priſma ABCLFE.

Appellatur *priſma quadrangulare*, quando plana oppoſita ſunt figuræ quadrilateræ.

Vocatur *priſma pentagonum*, quando plana oppoſita ſunt duo æqualia pentagona ſimilia; & ſic de cæteris.

Definitio VIII.

Fig. XVI. Tab. XI. *Parallelepipedum* eſt priſma, cujus duo oppoſita plana ſunt parallelogramma; unde continetur a ſex parallelogrammis, quorum bina oppoſita ſunt parallela, æqualia, & ſimilia: quale eſt ſolidum AL terminatum a ſex parallelogrammis AEMB, AEIF, ABCF, IEML, BMLC, IFCL.

Definitio IX.

Fig. VI. Tab. XII. *Cubus* eſt parallelepipedum contentum a ſex quadratis æqualibus: ut figura ſolida AM, cujus longitudo AL æqualis eſt latitudini LE, æqualis altitudini LC, & continetur a ſex quadratis AC, AF, AE, MB, ML, MI.

Definitio X.

Angulus Solidus dicitur, qui a pluribus quam duabus rectis lineis ad idem punctum concurrentibus, & non in eodem plano jacentibus conſtituitur; ſive eſt plurium planorum ad idem punctum concurſus: ſcilicet angulus ſolidus eſt, qui a pluribus quam duobus angulis planis non in eodem plano exiſtentibus, ſed ad unum punctum conſtitutis efficitur. Sic in cubo AM angulus conſtitutus in C a tribus angulis planis BCL, BCM, LCM, ideſt conſtitutus a tribus rectis CB, CL, CM non exiſtentibus in eodem plano, eſt angulus ſolidus.

Defi-

Definitio XI.

Si parallelogrammum ABCL ita revolvi intelligatur circa latus unum AL fixum & immobile, donec revertatur ad eandem poſitionem, ex qua diſceſſerat, ſolidum EC ab ipſo parallelogrammo deſcriptum appellatur *Cylindrus*. Fig. VII. Tab. XII.

Circuli æquales MFCI, ERBS, in revolutione parallelogrammi ab oppoſitis æqualibus lateribus LC, AB, deſcripti, dicuntur *Plana oppoſita*, vel *Baſes cylindri*. Superficies curva deſcripta a latere CB in revolutione, vocatur *Superficies cylindrica*. Latus vero fixum LA jungens centra oppoſitorum circulorum dicitur *Axis cylindri*. Quando axis AL eſt perpendicularis ad baſim ERBS, tunc *cylindrus* vocatur *rectus*. Si axis oblique inſiſtit ſupra baſim, dicitur *cylindrus inclinatus*, vel *obliquus*, ut FG. Cum vero cylindrus ſive rectus, ſive obliquus, ſive etiam incurvatus cavus eſt, ſeu perforatus, tunc appellatur *Sipho*, vel *Tubus*, ut AB, vel CEP. Fig. VII. Tab. XII. Fig. VIII. IX, & X. Tab. XII.

Definitio XII.

Pyramis eſt ſolidum contentum a baſi polygona, & a totidem triangulis ad unicum punctum baſi oppoſitum convenientibus, quot ſunt latera ejuſdem baſis. Punctum vero illud, in quo triangula conveniunt, dicitur *Vertex*, vel *Apex* pyramidis.

Si baſis fuerit triangulum (BCD), pyramis vocetur *trilatera*, ut pyramis ABCD. Fig. XI. Tab. XII.

Si baſis fuerit quadrilaterum (CFGI), pyramis vocetur *quadrilatera*, ut BCFGI. Si baſis fuerit pentagonum, *pentagona* dicetur pyramis. Fig. XII. Tab. XII.

Definitio XIII.

Si triangulum rectangulum ALB, cujus angulus rectus eſt in L, ita revolvatur circa latus AL fixum, & immobile, donec ad eandem poſitionem, ex qua diſceſſerat, revertatur, deſcribet figuram ſolidam ACFBE, quæ vocatur *Conus*. Circulus CFBE a catheto mobili LB deſcriptus, dicitur *baſis coni*. Superficies curva in revolutione trianguli deſcripta a latere AB, appellatur *ſuperficies conica*. Punctum ſublime A, *coni vertex*, aut *apex* dicitur. Latus immobile AL, ideſt recta ducta a vertice A ad centrum L baſis, vocatur *axis coni*. Quælibet recta AB, vel AC, vel AE, &c. a vertice coni ad peripheriam baſis BECF ducta, appellatur *latus coni*. Fig. XIII. Tab. XII.

Præterea deſcriptus conus dicitur *rectus*, quia axis L eſt perpendicularis baſi, ut ex ipſa deſcriptione conſtat. Atque cum axis LA eſt æqualis radio LB baſis, conus rectus dicitur *rectangulus*, vel *orthogonius*. Si axis LA major eſt radio LB, tunc conus rectus dicitur

XII. fuerit acutus, vel obtuſus, ſi nempe axis AL non fuerit perpendicularis baſi, tunc conus dicatur *obliquus*, ut AFCBM.

Definitio XIV.

Sphæra, vel *Globus* eſt ſolidum corpus unica ſuperficie curva contentum, cujus omnia ſuperficiei puncta æqualiter diſtant a puncto medio, quod *ſphæræ centrum* dicitur.

Fig.XV. Tab. XII. Generari autem concipitur ſphæra ASBEC ex revolutione ſemicirculi ASB circa diametrum fixum, & immobilem AL, donec revertatur ad poſitionem, ex qua diſceſſerat. Superficies curva in revolutione deſcripta a ſemiperipheria *ASB*, appellatur *ſuperficies ſphærica*. Centrum C ſemicirculi ASB dicitur *centrum ſphæræ*. Omnes rectæ ad ſuperficiem ſphæricam ductæ ſunt æquales inter ſe, & dicuntur *radii*, vel *ſemidiametri ſphæræ*.

Diameter AB, circa quam revolvi intelligitur ſemicirculus, vel ſphæra, appellatur *Axis ſphæræ*, & ejus extrema puncta A, & B vocantur *Poli* ejuſdem ſphæræ. Quælibet alia recta utrinque a ſuperficie ſphærica terminata, & per centrum ſphæræ tranſiens, dicitur *Diameter* ſphæræ.

Circulus, cujus peripheria eſt in ſuperficie ſphærica, & cujus centrum idem eſt ac centrum ſphæræ, appellatur *Circulus Maximus* ſphæræ: ut AEBS; atque bifariam dividit ſphæram, ſcilicet in duo *Hemiſphæria*.

Itaque Hemiſphærium eſt ſolidum terminatum a circulo maximo ſphæræ, & dimidia ſuperficie ſphærica.

Definitio XV.

Polyedrum dicitur ſolidum quodcumque a pluribus figuris planis rectilineis terminatum.

Definitio XVI.

Polyedrum, vel *ſolidum regulare* dicitur, cum plana, a quibus continetur, ſunt polygona regularia æqualia, & ſimilia, & omnes ejus anguli ſolidi ſunt æquales inter ſe.

Quinque tantum numerantur ſolida regularia; nimirum *Tetraedrum*, ſeu pyramis regularis contenta a quatuor triangulis regularibus, ideſt æquilateris, & æqualibus.

Cubus, ſeu *Hexaedrum* contentum a ſex quadratis æqualibus.

Octaedrum contentum ab octo triangulis æquilateris, & æqualibus:

Dodecaedrum a duodecim pentagonis regularibus, & æqualibus.

Icoſaedrum contentum a viginti triangulis æquilateris, & æqualibus.

Cætera omnia polyedra irregularia dicuntur.

Defi-

Definitio XVII.

Solida ſimilia dicuntur illa, quæ a planis ſimilibus ſimiliter poſitis, & numero æqualibus continentur.

Definitio XVIII.

Priſmata ſimilia ſunt, quorum ſimiles baſes ſunt inter ſe ut quadrata altitudinum.

Idem intelligatur de ſimilibus pyramidibus, de cylindris ſimilibus, & de ſimilibus conis.

Definitio XIX.

Quoniam circuli cylindrorum, & conorum baſes ſunt inter ſe (Coroll. 4. Propoſ. 2. Libri 5.) ut quadrata radiorum, vel diametrorum, ideo *cylindri ſimiles, & ſimiles coni* ſunt, quorum quadrata radiorum, vel diametrorum baſium ſunt inter ſe ut quadrata altitudinum.

Cum vero radices quadratorum proportionalium (Coroll. Prop. 22. Libri 1.) ſint etiam proportionales, iccirco cylindri, vel coni erunt ſimiles, ſi radii, vel diametri baſium fuerint inter ſe in ratione altitudinum. Præterea, ut cylindri, vel coni ſint ſimiles, neceſſe eſt ut ipſorum axes eandem habeant inclinationem ad baſes.

Definitio XX.

Altitudo cujuſvis priſmatis, vel cylindri, eſt recta linea a plano ſuperiore ad planum baſis perpendiculariter ducta. Itaque in cylindro recto axis eſt altitudo ejuſdem cylindri. Altitudo vero cujuſvis pyramidis, aut coni, eſt perpendicularis ad baſim ducta. Conſequenter in cono recto axis eſt altitudo ejuſdem coni.

Definitio XXI.

Sectio cujuſvis corporis, ſive ſolidi, eſt figura plana, quæ deſcribitur in ſolido, cum ſolidum ipſum a tranſverſo plano ſecatur. Ut ſi cylindrus AB ſecetur a plano EG parallelo baſi AC, circulus EG, qui in ea ſectione deſcribitur in cylindro, vocatur ſectio cylindri. Præterea oppoſita plana, ſeu baſes cylindri, vel priſmatis, etiam dicuntur ſectiones oppoſitæ cylindri, vel priſmatis. Fig. XVI. Tab. XII.

Definitio XXII.

Cylindrus ſphæræ circumſcriptus dicitur ille, cujus axis idem eſt cum ſphæræ axe, & cujus diameter baſis adæquat diametrum, ſeu axem ſphæræ.

Cylindrus vero hemiſphærio circumſcriptus ille eſt, qui baſim communem habet cum hemiſphærio, & cujus altitudo adæquat radium ſpheræ, ſeu altitudinem hemiſphærii.

PRO-

Demonſtratio.

Primo omnis recta linea in eodem plano poſita eſt, ſcilicet fieri nequit ut ejuſdem rectæ lineæ pars una jaceat in uno plano, & pars altera ſit in alio plano elevato, ut evidens eſt ex Definitionibus plani, & lineæ rectæ (Defin. 5. & 6. Lib. 2.).

Secundo, omne triangulum totum jacet in eodem plano: triangulum enim (Definit. 18. Lib. 2.) eſt figura plana; ideoque repugnat (Defin. 6. Libri 2.) unam ejuſdem trianguli partem in uno plano jacere, & alteram in alio plano poſitam eſſe.

Fig. XVII. Tab. XII. Tertio, ſi duæ rectæ ſe mutuo ſecent, in eodem plano jacebunt, ſive per duas rectas ſe mutuo ſecantes AB, AC, ſemper extendi poteſt aliquod planum. Nam ſi earumdem linearum duo quælibet puncta B, & C jungantur recta BC, habebitur triangulum ABC, quod totum (ſecunda parte) in eodem plano ABC reperietur; ergo etiam ejus latera AB, AC, in eodem plano jacebunt.

Quarto, ſimiliter quælibet alia figura plana ſemper tota in eodem plano jacet. Quod erat oſtendendum

Sunt Propoſitiones Prima, & Secunda Lib. 11. Euclidis.

PROPOSITIO SECUNDA.

Theorema.

Fig. XVIII. Tab. XII. *Communis ſectio (BA) duorum planorum (FG, BM) eſt linea recta.*

Demonſtratio.

Etenim ſi communis ſectio BA non eſſet linea recta, tunc quia puncta B, & A ſunt utrique plano communia, in plano BM (Poſtul. 1) duci poſſet recta ALB, & in alio plano FG duceretur alia recta AEB: quod repugnat (Definit. 5. Lib. 2. & Coroll.); ergo communis ſectio AB eſt linea recta. Quod erat demonſtrandum.

Eſt Propoſitio 3. Libri 11. Euclidis.

PRO-

PROPOSITIO TERTIA.

Theorema.

Si recta linea (AC) perpendicularis fuerit ad duas rectas (BE, LF) ſe mutuo ſecantes (in C), ipſa recta (AC) erit etiam perpendicularis ad planum (ST), in quo ipſæ rectæ jacent. Fig. XIX. Tab. XII.

Demonſtratio.

Nam ducta ad punctum ſublime A recta LA, ſi concipiatur triangulum rectangulum ACL revolvi circa cathetum fixum AC, donec redeat ad poſitionem, ex qua moveri cœperat, alter cathetus CL deſcribet planum circulum LMEFB, ad quem perpendicularis erit recta CA, quia in omni poſitione linea AC ſemper eſt perpendicularis rectæ CL, ſcilicet omnibus radiis circuli; ſed in eodem plano a recta CL deſcripto etiam reperiuntur rectæ LF, BE, quia (hypoth.) recta AC eſt ad eas perpendicularis: rectæ vero LF, BE (hypoth.) ſunt in plano ST; ergo recta AC (Demonſtrat.) perpendicularis ad planum circuli, etiam perpendicularis erit ad planum ST, in quo reperitur circulus. Quod erat demonſtrandum.

Eſt Propoſitio 4. Libri 11. Euclidis.

Corollarium I.

Hinc ſi recta AC perpendicularis fuerit tribus rectis BE, LF, CM, ſe mutuo ſecantibus in C, illæ tres rectæ in eodem plano poſitæ erunt.

Eſt Propoſitio 5. Libri 11. Euclidis.

Corollarium II.

Præterea evidens eſt unicam perpendicularem CA ad planum ST ex puncto C erigi poſſe.

PROPOSITIO QUARTA.

Theorema.

Lineæ rectæ (AB, CL) ad idem planum (EF) perpendiculares, erunt inter ſe parallelæ. Fig. XX. Tab. XII.

Demonſtratio.

Ducatur in plano recta BC, ad quam (Definit. 2.) perpendiculares erunt ambæ rectæ AB, LC, atque concipiatur recta AB perpendicu-

dicularitet ad planum EF moveri, & fluere ſupra rectam BC, donec perveniat ad punctum C, ubi coincidet cum recta CL, aliter enim alterutra ipſarum non eſſet perpendicularis ad planum (Coroll. 2. Prop. anteced.), atque motu ſuo deſcribet planum ABCL, in quo (conſtruct.) jacent rectæ AB, CL, quas ſecat recta BC, & efficit angulos internos ABC, LCB, rectos, & æquales; ergo (Propoſ. 18. Lib. 2.) rectæ AB, CL erunt parallelæ. Quod erat oſtendendum.

Eſt Propoſitio 6. Libri 11. Euclidis.

Corollarium I.

Ergo rectæ parallelæ AB, CL, & recta BC in eas incidens, in eodem plano jacebunt.

Eſt Propoſitio 7. Libri 11. Euclidis.

Corollarium II.

Quod ſi duæ rectæ AB, CL fuerint parallelæ, & ipſarum una AB fuerit perpendicularis ad planum EF, etiam altera CL erit perpendicularis ad idem planum, quia (Coroll. 2. Prop. anteced.) ex eodem puncto C unica erigi poteſt perpendicularis ad planum EF, quæ (anteced. Demonſtratione) parallela erit perpendiculari AB. Cum autem (hypoth.) CL ſit parallela rectæ AB, erit etiam perpendicularis ad planum EF: aliter enim ex eodem puncto C eidem rectæ AB duæ parallelæ ducerentur; quod repugnat (Defin. 11. Lib. 2.)

Eſt Propoſitio 8. Libri 11. Euclidis.

PROPOSITIO QUINTA.

Theorema.

Fig. XXI. Tab. XII. *Si eidem rectæ lineæ (EM) parallelæ fuerint aliæ duæ rectæ (AB, CL), ſed non in eodem plano cum illa exiſtentes, ipſæ quoque inter ſe parallelæ erunt.*

In plano AM, in quo ſunt duæ parallelæ AB, EM, ducatur EA perpendicularis rectæ EM. Similiter in plano CM, in quo ſunt duæ parallelæ EM, CL, ducatur recta EC perpendicularis eidem EM, jungaturque recta AC.

Demonſtratio.

Recta EM (conſtruct.) eſt perpendicularis duabus rectis AE, EC ſe mutuo ſecantibus in E, iccirco (Propoſ. 3.) erit perpendicularis plano AEC, in quo jacent ipſæ rectæ; conſequenter tam recta AB, quam recta CL, quæ (hypoth.) ſunt parallelæ eidem rectæ EM (Co-

Eſt Propoſitio 9. Libr. 11. Euclidis.

Corollarium.

Hinc facile apparet communem ſectionem ME duorum planorum ABME, EMLC, quæ per lineas parallelas AB, LC extenduntur, parallelam eſſe utrique parallelarum AB, LC.

PROPOSITIO SEXTA.

Theorema.

Si plana parallela (EF, GH) ſecentur ab alio plano (ABCL), planorum ſectiones (AB, CL) erunt etiam parallelæ. Fig. 1. Tab. XIII.

Demonſtratio.

Sectiones AB, CL ſunt lineæ rectæ (Propoſ. 2.), & reperiuntur in eodem plano ABCL, ideoque ſi parallelæ non eſſent, productæ eandem inter ſe convenirent, quod fieri non poteſt, niſi etiam oppoſita plana EF, GH, in quibus illæ ſectiones AB, CL continentur, inter ſe conveniant: quod repugnat (Defin. 6.), cum eadem plana ſint ex hypotheſi parallela, Ergo ſectiones AB, CL erunt parallelæ. Quod erat oſtendendum.

Eſt Propoſitio 16. Lib. 11. Euclidis.

PROPOSITIO SEPTIMA.

Theorema.

Si duæ rectæ (AB, BE) ſe invicem ſecantes in plano (EF) parallelæ fuerint rectis (CL, CG) ſe mutuo ſecantibus in plano (GH); duo plana (EF, GH) erunt pariter inter ſe parallela. Fig. 1. Tab. XIII.

Demonſtratio.

Etenim rectæ AB, CL ex hypotheſi parallelæ, in eodem plano ABCL reperiuntur; item rectæ parallelæ BE, CG ſunt in eodem plano EBCG; proindeque plana EF, GH neque producta juxta directiones linearum AB, CL, neque ſecundum directiones linearum EB, GC convenire poſſunt, quia ſi concurrerent, etiam lineæ parallelæ AB, CL, vel BE, CG convenirent: quod repugnat (Defin. 11. Lib. 2.); ergo neceſſe eſt ut plana EF, GH, ſint parallela (Defin. 6.). Quod erat oſtendendum.

Eſt Propoſitio 15. Libri 11. Euclidis.

Si autem recta BC perpendicularis fuerit ad utramque rectam BA, BE ſe mutuo ſecantes in B, erit perpendicularis plano EF (Prop. 3.); cumque ſit CL parallela rectæ BA, & CG parallela rectæ BE, recta BC erit etiam perpendicularis duabus CB, AB (Prop. 19. Lib. 2.); conſequenter (Propoſ. 3.) etiam perpendicularis erit ad planum GH. Quapropter plana, ad quæ eadem recta linea eſt perpendicularis, ſunt inter ſe parallela, & e converſo.

Eſt Propoſitio 14. Libri 11. Euclidis.

PROPOSITIO OCTAVA.

Theorema 8.

Quodlibet priſma polygonum dividitur in totidem priſmata triangularia æque alta, quot ſunt latera baſis, demptis duobus.

Demonſtratio.

Sit priſma pentagonum AM, & ab æqualibus angulis GBC, SAF Fig. II. Tab. XIII. oppoſitarum baſium æqualium (Defin. 6.), atque ſimilium ducantur ad oppoſitos angulos rectæ lineæ BM, BL, AI, AE, baſes oppoſitæ, ſeu ſingula pentagona GBCLM, AFEIS diviſa erunt in tria triangula, quorum duo GBM, ISA ſunt æqualia, & ſimilia, quia (Definit. 6.) habent latera GB = SA, GM = SI, & angulum BGM = ASI; ideoque (Propoſ. 6. Lib. 2.) erit BM = AI, angulus GMB = AIS: unde ab æqualibus angulis GML, EIS auferendo æquales angulos GMB, AIS, (Axiom. 3.) relinquetur angulus BML = EIA; ſed (Demonſtrat.) eſt BM = AI, & (hypoth.) ML = IE, iccirco (Propoſ. 6. Lib. 2., & Defin. 2. hujus Libri) triangulum BML erit æquale, & ſimile triangulo IAE. Eadem ratione æqualia, & ſimilia erunt triangula BCL, AEF; atque ita de reliquis, ſi plura eſſent. Præterea, quia duæ rectæ AB, IM ſunt (hypoth.) parallelæ, & æquales eidem rectæ SG, ideo (Prop. 5. & Axiom. 1.) parallelæ, & æquales erunt; conſequenter (Prop. 29. Lib. 2.) æquales rectæ BL, AE erunt parallelæ. Itaque plana AB MI, ABLE ſunt parallelogramma; atque ſecant integrum priſma AM in tres partes ABMISG, ABLEIM, & ABLEFC, quæ (Defin. 7.) ſunt tria priſmata triangularia, continentur enim (Demonſtrat.) ab oppoſitis planis parallelis, æqualibus, & ſimilibus, & a totidem parallelogrammis, quot ſunt latera baſis. Eodem modo demonſtratur priſma hexagonum dividi in quatuor priſmata triangularia; priſma heptagonum in quinque; priſma octangulare in ſex priſmata triangularia, & ita deinceps. Quod erat oſtendendum.

Co-

Corollarium.

Itaque ſi duo plana parallela ſecentur ab alio plano, planorum ſectiones erunt parallelæ: ut ſectiones BM, AI factæ a plano AIMB ſecante duo plana oppoſita, & parallela BCLMG, AFEIS (Deo monſtrat.) ſunt parallelæ.

Eſt Propoſitio 16. Libri 11. Euclidis.

PROPOSITIO NONA.

Theorema.

Primo ſi quodlibet priſma triangulare (AM) ſecetur a plano tranſverſo (BCL) baſi (AFE, vel GRM) parallelo, ſectio (BCL) erit ſimilis, & æqualis baſi. Fig. III. Tab. XIII.

Demonſtratio.

Plana parallela BCL, AFE ſecantur a plano AR, ideo (Prop. 6. & Coroll. Prop. anteced.) ſectiones BC, AF erunt parallelæ. Eadem ratione CL eſt parallela rectæ FE, & BL parallela rectæ AE. Sed (hypotheſ.) AB eſt parallela rectæ FC, FC parallela rectæ EL, & EL parallela rectæ AB; ideoque (Prop. 28. Lib. 2.) erit BC = AF, CL = FE, & BL = AE; proindeque (Propoſ. 9. Lib. 2.) erit angulus BCL = AFE, angulus CBL = EAF, & BLC = AEF: conſequenter ſectiones AEF, BCL erunt æquales, & ſimiles.

Secundo ſi quodcumque priſma polygonum ſecetur a plano baſi parallelo, ſectio erit pariter æqualis, & ſimilis baſi.

Nam priſma polygonum (Prop. anteced.) dividitur in priſmata triangularia, & oppoſitæ ſectiones, ſeu baſes, in totidem triangula dividuntur, quorum bina oppoſita æqualia ſunt, & ſimilia, ac ſimiliter poſita: unde integra ſectio ſimilis, & æqualis erit baſi. Quod erat propoſitum.

Corollarium.

Quoniam circuli (Coroll. 3. Prop. 7. Libri 5.) ſunt polygona infinitorum laterum, & baſes cylindri (Defin. 11.) ſunt circuli æquales, ideo cylindrus conſiderari poteſt tanquam priſma polygonum infinitorum laterum; proindeque ſectio cylindri parallela baſi, erit pariter circulus æqualis, & ſimilis baſi.

Omne priſma componi intelligitur ex totidem planis baſi æqualibus, & parallelis, quot ſunt elementa, ſeu puncta in altitudine ejuſdem priſmatis; atque productum ex altitudine in baſim erit ſoliditas ejuſdem priſmatis.

Demonſtratio.

Fig. IV. Tab. XIII. Dato quovis priſmate AM, ſi mente concipiamus planum, ſeu baſim ASEF motu ſibi conſtanter parallelo & elevari uſque ad altitudinem, ſeu ultimam poſitionem GKRM, & in omni altitudinis AK puncto, ſive in omni poſitione BCLI ſemper ſui veſtigium relinquere; evidens eſt planum AE deſcribere ſolidum priſma AM: quod de alio quolibet priſmate intelligatur. Præterea, quia (Demonſtrat.) priſma componitur ex totidem planis baſi æqualibus, & ſimilibus, quot ſunt elementa, ſeu puncta in altitudine AK; ideo ſoliditas cujuſvis priſmatis erit æqualis producto ex altitudine AK, ſeu FR in baſim ASEF. Quod erat oſtendendum.

Corollarium I.

Quapropter dato priſmate parallelepipedo rectangulo, cujus longitudo AF ſit unciarum 4, & latitudo FE ſit unciarum 2, area rectanguli, ſeu baſis AFES erit 2×4, ideſt 8 unciarum quadratarum. Altitudo vero priſmatis, ſeu recta AK ſit unciarum 27 longitudinis; multiplicetur altitudo 27 in baſim inventam 8, productum 216 erit ſoliditas dati priſmatis: nimirum priſma datum continebit 216 uncias cubicas.

Corollarium II.

Cylindrus (Corollar. Propoſ. 9.) eſt priſma polygonum infinitorum laterum, ideo etiam de cylindro verificantur ea, quæ de priſmate demonſtravimus. Itaque ſi (Coroll. 2. & Schol. Propoſit. 8. Libri 5.) inveniatur area circuli, qui eſt baſis cylindri, & multiplicetur per altitudinem ejuſdem cylindri, habebitur cylindri ſoliditas.

PROPOSITIO UNDECIMA.

Theorema.

Fig. V. Tab. XIII. *Si quælibet pyramis triangularis (ABCM) ſecetur a plano tranſverſo (EFL) baſi (BCM) parallelo, ſectio (EFL) erit ſimilis baſi.*

Baſis

tiæ altitudinis (AI) abſciſſæ pyramidis (AEFIL).

Secentur CR = FE, & CS = FL; & ducantur rectæ ER, SL, RS.

Demonſtratio.

Planum ABC ſecans plana parallela BCM, EFL efficit ſectiones BC, EF (Coroll. Prop. 8.) inter ſe parallelas, & (conſtruct.) ſunt æquales; ideoque (Prop. 29. Lib. 2.) rectæ ER, CF erunt parallelæ, & æquales. Similiter æquales rectæ FL, CS demonſtrantur parallelæ; unde etiam rectæ FC, LS erunt parallelæ, & æquales; proindeque (Propoſ. 5. & Axiom. 1.) etiam parallelæ, & æquales erunt inter ſe rectæ ER, SL: quapropter (Propoſ. 29. Lib. 2.) recta EL parallela, & æqualis erit rectæ RS. Ergo (Propoſ. 9. Libri 2.) erit angulus RCS = EFL, angulus CRS = FEL &c, & triangulum EFL (Prop. 7. Libri 3.) ſimile, & æquale erit triangulo RCS. Sed (Coroll. Propoſ. 8.) eſt BM parallela rectæ EL, & ipſi EL demonſtravimus parallelam eſſe rectam RS: igitur (Propoſ. 5.) erit RS parallela lateri BM. Itaque (Coroll. Propoſ. 7. Libri 3.) triangulum RCS erit ſimile triangulo BCM: conſequenter (Coroll. Defin. 1. Lib. 3.) etiam triangulum EFL erit ſimile triangulo BCM; triangulum vero BCM eſt ad ſimile triangulum EFL (Prop. 14. Lib. 3.) ſicuti $\overline{CM}^2$ ad $\overline{FL}^2$, & in triangulis ſimilibus ACM, AFL (Coroll. Propoſ. 7. Lib. 3.) eſt $\overline{CM}^2 : \overline{FL}^2 :: \overline{AM}^2 : \overline{AL}^2$, & in ſimilibus triangulis AZM, AIL, eſt $\overline{AM}^2 : \overline{AL}^2 :: \overline{AZ}^2 : \overline{AI}^2$. Ergo (Axiom. 1.) erit baſis BCM ad parallelam ſectionem EFL ſicuti $\overline{AZ}^2 : \overline{AI}^2$. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

Idem verificatur de pyramidibus polygonis, quæ dividuntur in totidem pyramides æque altas, quot ſunt latera baſis, demptis duobus. Fig. VI. Tab. XIII. Sic pyramis quadrilatera BCFGI dividitur in duas pyramides triangulares BCFI, BIGF æque altas, atque quælibet ſectio AEML parallela baſi ſimilis demonſtratur eidem baſi CFGI; duo enim triangula IFC, IFG (Demonſtr. anteced.) ſunt ſimilia triangulis LEA, LEM, & ſimiliter poſita: unde integra baſis ICFG erit ſimilis integræ ſectioni AEML.

Corollarium II.

Itaque in omni pyramide ſectiones baſi parallelæ a baſi uſque ad verticem procedendo continuo decreſcunt in ratione quadratorum ſuarum altitudinum, ſeu diſtantiarum a vertice. Fig. V. Tab. XIII. Si ex. gr. tota altitudo

tudo

Corollarium III.

Præterea quia circulus coni baſis (Coroll. 3. Propoſ. 1. Lib. 5.) eſt polygonum regulare infinitorum laterum, ideo conus eſt pyramis polygona infinitorum laterum, atque coni ſectiones baſi parallelæ ſimiles erunt eidem baſi: hoc eſt, erunt etiam circuli, qui a baſi uſque ad verticem progrediendo continuo decreſcunt in ratione quadratorum ſuarum diſtantiarum a vertice.

PROPOSITIO DUODECIMA.

Theorema.

Pyramides æque altæ, ſive inter plana parallela conſtitutæ, ſunt inter ſe in ratione baſium.

Fig. VII. & VIII. Tab. XIII.

Pyramides EFHM, ABCDL habeant æquales altitudines EI = AZ, erit pyramis EFHM ad pyramidem ABCDL, ſicuti baſis FHM ad baſim BCDL.

Demonſtratio.

Etenim utraque pyramis componi intelligitur ex totidem planis baſi ſimilibus, & parallelis decreſcentibus in ratione quadrata diſtantiarum a vertice (Coroll. 2. Propoſ. anteced.), quot ſunt elementa, ſeu puncta in altitudine EI, ſeu AZ.

Itaque ex altitudinibus æqualibus EI, AZ ſumantur quælibet partes æquales ES, AR, atque per puncta S, & R extendantur plana GKO, TRVXY baſibus FHM, BCDL parallela, ſectiones GKO, TVXY (Propoſ. anteced.) reſpondentibus baſibus ſimiles erunt, atque erit FHM : GKO : : $\overline{EI}^2 : \overline{ES}^2$, ſive $\overline{AZ}^2 : \overline{AR}^2$ (quia eſt EI = AZ, & ES = AR). Similiter (Coroll. 2. Propoſ. anteced.) erit BCDL : TVXY : : $\overline{AZ}^2 : \overline{AR}^2$; ideoque (Axiom. 1.) erit FHM : GKO : : BCDL : TVXY; & alternando, erit baſis FHM ad baſim BCDL, ſicuti ſectio GKO ad ſectionem æque altam TVXY: quod ſemper verificatur de omnibus ſectionibus æque altis; proindeque colligendo, erit baſis FHM ad baſim BCDL, ſicuti ſumma omnium ſectionum pyramidem EFHM conſtituentium, ad ſummam omnium totidem ſectionum efficientium pyramidem ABCDL: nimirum erit pyramis ad æque altam pyramidem, ſicuti baſis ad baſim. Quod erat demonſtrandum.

Sunt Propoſitiones 5, & 6 Libri 12. Euclidis.

Co-

Itaque ſi pyramides æque altæ habuerint eandem, vel æquales baſes, erunt pariter æquales inter ſe.

Corollarium II.

Coni æque alti ſunt etiam inter ſe ut baſes, ideſt ut circuli baſes conorum, quia coni (Coroll. 3. Propoſ. 11.) ſunt pyramides polygonæ infinitorum laterum.

Eſt Propoſitio 10. Libri 12. Euclidis.

Præterea ſi circuli baſes conorum fuerint æquales, etiam coni æque alti erunt æquales inter ſe.

Corollarium III.

Quoniam circuli conorum baſes (Coroll. 4. Propoſ. 2. Libri 5.) ſunt inter ſe ut quadrata radiorum, ſeu diametrorum, ideo coni æque alti, qui (Demonſtrat.) ſunt inter ſe in ratione baſium, erunt etiam inter ſe ut quadrata radiorum, ſeu diametrorum baſium.

PROPOSITIO DECIMATERTIA.

Theorema.

Priſma eſt triplum pyramidis habentis eandem, vel æqualem baſim, & eandem, vel æqualem altitudinem.

Demonſtratio.

Primo ſit priſma triangulare BCLEAF, in quo ducantur parallelogrammorum diametri BE, AB, AL. Duæ pyramides ABLC, BFBA ſupra baſes (Definit. 7.) æquales BLC, EAF, & eandem altitudinem habentes, ſive inter plana parallela BCL, ABF conſtitutæ (Coroll. 1. Propoſ. anteced.) erunt æquales inter ſe. Præterea ſi pro vertice pyramidis BEAF ſumatur A, ejus baſis erit EFB, & eadem pyramis ABFE (Corollar. 1. Propoſ. anteced.) erit æqualis pyramidi ABLE, cujus vertex eſt A, & baſis EBL, quia habent baſes EBF, EBL (Propoſit. 28. Libri 2.) æquales, & habent eandem altitudinem, quæ eſt perpendicularis ducta ex vertice communi A ad planum EFBL, in quo reperiuntur baſes. Itaque (Axiom. 1.) tres pyramides ABCL, BFEA, AELB erunt inter ſe æquales, & ſimul ſumptæ (Axiom. 10.) adæquant integrum priſma BCLEFA. Ergo idem priſma erit triplum pyramidis ſibi inſcriptæ ABCL, ſive habentis eandem baſim BCL, & eandem altitudinem priſmatis. Quod erat oſtendendum. Fig. IX. Tab. XIII.

Eſt Propoſitio 7. Libri 12. Euclidis.

Se-

omnium pyramidum triangularium ſimul ſumptarum: ideſt priſma polygonum triplum erit ſibi inſcriptæ pyramidis polygonæ. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

Similiter cylindrus eſt triplus coni ſibi inſcripti, qui nempe eandem cum cylindro baſim, & eandem altitudinem habeat; quia cylyndrus eſt priſma infinitorum laterum, & conus eſt pyramis etiam infinitorum laterum.

Eſt Propoſitio 10. Libri 12. Euclidis.

Corollarium II.

Quoniam (Propoſ. 10. & Coroll.) priſmatis vel cylindri ſoliditas obtinetur multiplicando baſim in altitudinem; ideo pyramidis, vel coni ſoliditas æqualis erit producto ex baſi in tertiam altitudinis partem, quia (Demonſtrat.) pyramis vel conus eſt tertia pars priſmatis, vel cylindri habentis eandem baſim, & eandem altitudinem.

PROPOSITIO DECIMAQUARTA.

Theorema.

Priſmata æque alta ſunt inter ſe in ratione baſium.

Demonſtratio.

Nam priſmata (Propoſ. anteced.) ſunt tripla pyramidum ſibi inſcriptarum; pyramides vero æque altæ (Propoſ. 12.) ſunt inter ſe ut baſes; ergo etiam priſmata pyramidum tripla erunt inter ſe in ratione baſium. Quod erat demonſtrandum.

Eſt Propoſitio 32. Libri 11. Euclidis.

Corollarium I.

Hinc ſi priſmata æque alta habuerint eandem, vel æquales baſes, erunt pariter æqualia inter ſe.

Sunt Propoſitiones 30, & 31 Libri 11. Euclidis.

Corollarium II.

Hæc omnia etiam de cylindris verificantur, quia ſunt priſmata infinitorum laterum.

PRO-

PROPOSITIO DECIMAQUINTA.

Theorema.

Priſmata (AD, GL) habentia æquales baſes (ABC = GHI) ſunt inter ſe in ratione altitudinum (AE, GZ). Fig. XII. Tab. XIII.

Demonſtratio.

Etenim ex majori altitudine AE ſecetur pars AT æqualis minori GZ, & per punctum T extendatur planum TRM parallelum baſi ABC; erit priſma AM æquale priſmati GL; ſed priſma AD eſt ad priſma AM ſicuti AE ad AT (Coroll. 1. Propoſ. 12.); ideoque ſubſtituendo priſma GL pro æquali priſmate AM, & GZ pro æquali AT, erit priſma AT ad priſma GL ſicuti AE ad GZ. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

Hinc pyramides, quæ ſunt ſubtriplæ priſmatum ſibi circumſcriptorum, ſi habuerint eandem, vel æquales baſes, erunt etiam inter ſe in ratione altitudinum.

Corollarium II.

Idem intelligatur de cylindris, & de conis; quia cylindri ſunt priſmata, & coni ſunt pyramides infinitorum laterum.

Eſt Propoſitio 14. Lib. 12. Euclidis.

PROPOSITIO DECIMASEXTA.

Theorema.

Priſmata quæcumque (AD, GL) ſunt inter ſe in ratione compoſita ex rationibus baſium (ABC, GHI), & altitudinum (AE, GZ). Fig. XII. Tab. XIII.

Ex priſmate AD abſcindatur, ut in antecedenti Propoſitione, priſma AM æque altum cum priſmate GL.

Demonſtratio.

Trium priſmatum AD, AM, GL, primum AD eſt ad ſecundum AM, ſicuti AE : AT, ſive ſubſtituendo GZ pro æquali AT, eſt AD : AM : : AE : GZ; ſecundum vero AM (Propoſ. 14.) eſt ad tertium GL ſicuti baſis ABC ad baſim GHI; ergo (Propoſ. 16.

Lib. 3.) erit primum A D ad tertium G L in ratione compoſita ex rationibus A E : GZ primi ad ſecundum, & ABC : GHI ſecundi ad tertium; ergo erit priſma A D ad priſma G L ſicuti ABC × AE ad GHI × GZ. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

Si priſmata A D, G L fuerint ſimilia, hoc eſt terminata a planis ſimilibus, ſimiliterque poſitis, & numero æqualibus, ſi nempe fuerit

AE : GZ : : AC : GI : : AB : GH : : BC : HI &c, & anguli reſpondentes fuerint æquales EAB = ZGH, EAC = ZGI, CAB = IGH &c, tunc (Propoſ. 14, & 16 Lib. 3.) erit baſis ABC ad baſim GHI ſicuti $\overline{AB}^2$ ad $\overline{GH}^2$, vel ſicuti $\overline{AE}^2$ ad $\overline{GZ}^2$ &c. Sed (Demonſtrat. anteced.) eſt

AD : GL : : ABC × AE : GHI × GZ: unde ſubſtituendo rationem $\overline{AE}^2$: $\overline{GZ}^2$ pro æquali ratione ABC : GHI, erit

AD : GL : : $\overline{AE}^2$ × AE : $\overline{GZ}^2$ × GZ, ſcilicet AD : GL : : $\overline{AE}^3$, $\overline{GZ}^3$; atqui (hypoth.) eſt AE : GZ : : AC : GI : : AB : GH &c; ideoque erit etiam $\overline{AE}^3$: $\overline{GZ}^3$: : $\overline{AC}^3$: $\overline{GI}^3$: : $\overline{AB}^3$: $\overline{GH}^3$ &c; ergo (Axiom. 1.) erit

AD : GL : : $\overline{AC}^3$: $\overline{GI}^3$: : $\overline{AB}^3$: $\overline{GH}^3$ &c; nimirum priſmata ſimilia erunt inter ſe ut cubi laterum homologorum, vel altitudinum.

Itaque ſi latera unius priſmatis fuerint quadrupla laterum alterius, ſimiliſque priſmatis, tunc primum erit ſexaginta quatuor vices majus ſecundo priſmate.

In hoc Corollario continetur Propoſitio 33. Lib. 11. Euclidis.

Corollarium II.

Hæc omnia verificantur de ſimilibus pyramidibus, quæ (Prop. 13.) ſunt ſubtriplæ priſmatum ſibi circumſcriptorum.

Corollarium III.

Idem verificatur de cylindris ſimilibus, & de ſimilibus conis, quia cylindri ſunt priſmata, & coni ſunt pyramides infinitorum laterum: ideoque cylindri, vel coni erunt inter ſe ut cubi altitudinum, vel ſicuti cubi diametrorum, ſeu radiorum baſium, quia (Defin. 18.) habent diametros, ſeu radios baſium in ratione altitudinum.

PRO-

PROPOSITIO DECIMASEPTIMA.

Theorema.

Priſmata, quæ habent baſes in reciproca ratione altitudinum, ſunt æqualia. E converſo priſmata æqualia habent baſes in reciproca ratione altitudinum.

Demonſtratio.

Nam ſi eſt ABC : GHI : : AE : GZ, erit ABC × AE = GHI × GZ, ſcilicet priſma AD æquale priſmati GL. Fig. XII. Tab. XIII.

Viciſſim ſi fuerit ABC × AE = GHI × GZ, diſſolvendo erit ABC : GHI : : AE : GZ; ideſt priſmata æqualia habent baſes in reciproca ratione altitudinum. Quod erat oſtendendum.

Corollarium.

Eadem omnia verificantur de pyramidibus, de cylindris, & de conis, ut ex antecedentibus Demonſtrationibus patet.

PROPOSITIO DECIMAOCTAVA.

Theorema.

Sphæra duas tertias partes circumſcripti cylindri adæquat.

Sit quadratum ABCL, in quo ducatur diameter AC, & centro A, radio AL, vel AB, deſcribatur arcus LFB, qui (Definit. 7. Lib. 4.) erit quarta peripheriæ pars, & triangulum mixtilineum ALB (Definit. 8. Libri 4.) erit circuli quadrans. Ducatur radius AF, & per punctum F recta ST parallela lateri AB. Si concipiatur quadratum ABCL cum triangulo ALC, & cum circuli quadrante ALB ita revolvi circa latus immobile AL, donec redeat ad poſitionem, ex qua diſceſſerat; in ea revolutione quadratum ABCL (Defin. 11.) deſcribet cylindrum; triangulum rectangulum ALC (Definit. 13.) deſcribet conum; & quadrans ALB (Definit. 14.) hemiſphærium deſcribet; atque cylindrus (Coroll. Propoſ. 10.) componetur ex totidem circulis æqualibus, habentibus radios æquales AB, ST, LC &c, quot ſunt elementa, ſeu puncta in perpendiculari AL; conus etiam conſtruitur ab æquali numero circulorum decreſcentium (Corollar. 3. Propoſ. 11.) ACL uſque ad punctum A, quorum radii ſunt rectæ LC, SR &c, ſcilicet elementa trianguli ALC. Similiter hemiſphærium componitur ex totidem circulis habentibus radios AB, SF, &c. decreſcentes a puncto A uſque ad L. Conſequenter Fig. XIII. Tab. XIII.

tria deſcripta corpora ab æquali numero elementorum, ideſt planorum circulorum componuntur.

Demonſtratio.

Sit jam ST radius unius ex æqualibus circulis conſtituentibus cylindrum; erit SF radius reſpondentis circuli in hemiſphærio, & SR erit radius reſpondentis circuli in cono. Quoniam vero circuli (Coroll. 4. Propoſ. 2. Libri 5.) ſunt inter ſe ut quadrata radiorum, ideo circuli deſcripti a radio ST in cylindro, a radio SF in hemiſphærio, & a radio SR in cono, erunt inter ſe ut quadrata radiorum ST, SF, SR; ſed (conſtruct.) eſt ST = AB, & AB = AF, iccirco (Axiom. 1.) erit ST = AF, & (Coroll. Propoſ. 7. Lib. 3.) eſt AL : LC : : AS : SR, atque (hypoth.) eſt AL = LC, ideoque erit etiam AS = SR: unde pro lineis ST, SR, ſubſtituantur æquales rectæ AF, AS, & circuli deſcripti a radiis ST, SF, SR, qui (Demonſtr.) ſunt inter ſe ut quadrata eorumdem radiorum, erunt etiam inter ſe ſicuti quadrata rectarum AF, SF, AS; atqui (Coroll. 1. Propoſ. 18. Libri 3.) eſt $\overline{AF}^2 = \overline{SF}^2 + \overline{AS}^2$; ergo etiam circulus a radio ST in cylindro deſcriptus æqualis erit duobus circulis a radiis SF in hemiſphærio, & SR in cono deſcriptis.

Itaque ſi ex circulo a radio ST deſcripto in cylindro auferatur circulus a radio SR in cono deſcriptus, remanebit circulus a radio SF in hemiſphærio deſcriptus.

Idem verificatur de ſingulis reſpondentibus circulis ſupradicta ſolida conſtituentibus. Ergo ſi a ſoliditate cylindri ſubtrahatur ſoliditas coni, relinquetur ſoliditas hemiſphærii. Eſt autem conus (Coroll. 1. Propoſ. 13.) tertia pars cylindri æque alti, & ejuſdem baſis, ideoque hemiſphærium æquale erit reliquis duabus tertiis partibus ejuſdem cylindri ſibi circumſcripti. Quod de hemiſphærio demonſtravimus, idem intelligatur de ejus duplo, ſive de integra ſphæra, cujus cylindrus circumſcriptus etiam duplus eſt cylindri hemiſphærio circumſcripti. Itaque ſphæræ ſoliditas æqualis eſt duabus tertiis partibus cylindri circumſcripti. Quod erat oſtendendum.

Eſt Archimedis Propoſitio 32. Libri de Sphæra, & Cylindro.

Corollarium I.

Ergo Sphæra eſt ad cylindrum ſibi circumſcriptum ſicuti 2 : 3; & invertendo, cylindrus eſt ad ſphæram ſibi inſcriptam, ſicuti 3 : 2.

Corollarium II.

Quapropter (Coroll. 2. Propoſ. 10.) inventa ſoliditate cylindri circumſcripti, ſi ex ejuſdem cylindri ſoliditate dematur tertia pars, remanebit ſphæræ ſoliditas.

PRO-

PROPOSITIO DECIMANONA.

Theorema.

Sphæræ ſunt inter ſe in ratione triplicata, ideſt ut cubi diametrorum.

Demonſtratio.

Omnes cylindri ſphæris circumſcripti (Definit. 22.) habent diametros baſium æquales altitudinibus; ideoque (Definit. 18.) ſunt ſimiles. Cylindri autem ſimiles (Coroll. 3. Prop. 16.) ſunt inter ſe ut cubi diametrorum baſium. Præterea, quia (Propoſ. antec.) cylindrus ſemper eſt ad ſphæram ſibi inſcriptam ſicuti 3 : 2, ideo (Axiom. 1.) quilibet cylindrus eſt ad ſphæram ſibi inſcriptam, ſicuti alius cylindrus ad ſphæram ſibi inſcriptam; & alternando, erit cylindrus ad alium ſimilem cylindrum, ſicuti ſphæra in primo inſcripta ad ſphæram inſcriptam in altero. Cylindri vero ſunt inter ſe ut cubi diametrorum baſium; ergo (Axiom. 1.) etiam ſphæræ erunt inter ſe ut cubi ſuarum diametrorum, quæ (Definit. 22.) diametros baſium eorumdem cylindrorum adæquant. Sive erunt inter ſe ut cubi radiorum, cum radiorum, & diametrorum ratio eadem ſit. Ergo ſpheræ ſunt inter ſe in ratione triplicata &c. Quod erat oſtendendum.

Eſt Propoſitio 18. Libri 12. Euclidis

Corollarium.

Ergo ſphæra, cujus diameter ſit 2, ad ſphæram, cujus diameter ſit 6, erit ut 8 : 216; ſed eſt 8 : 216 = 1 : 27, ideo diameter tripla, ſeu, quod idem eſt, radius triplus producit ſphæram viginti ſeptem vices majorem. Similiter radius quintuplus deſcribit ſphæram centum viginti quinque vices majorem ſphæra deſcripta a radio ſimplo. Fig. XIV. Tab. XIII.

Elementorum Geometriæ Finis.

Propoſitionum Omnium, quæ in hiſce Matheſeos Elementis occurrunt, atque demonſtrantur.

In Arithmetices Librum I.

I. Probl. *Datum quemvis numerum Arithmeticis figuris exprimere.* Pag. 5
II. Probl. *Datum quemvis numerum Arabicis figuris deſcriptum enunciare.* 7
III. Probl. *Numeros integros in unam ſummam colligere.* 8
IV. Probl. *Numerum quemvis integrum ex alio integro majore ſubtrahere.* 11
V. Probl. *Datum quemvis numerum integrum per alium integrum numerum multiplicare.* 13
VI. Probl. *Numerum quemlibet integrum per alium integrum numerum dividere.* 17

In Arithmetices Librum II.

I. Probl. *Maximam communem duorum numerorum menſuram invenire.* 26
II. Probl. *Fractiones ad minimas terminos reducere.* 27
III. Probl. *Numeros fractos ad idem nomen reducere.* 28
IV. Probl. *Datis duabus, aut pluribus fractionibus, quænam ipſarum maxima ſit invenire.* 29
V. Probl. *Numerum integrum in fractionem datæ denominationis reducere.* 29
VI. Probl. *Fractionem ad integra revocare.* 29
VII. Probl. *Fractiones addere.* 30
VIII. Probl. *Numeros fractos ſubtrahere.* 30
IX. Probl. *Numeros fractos multiplicare.* 31
X. Probl. *Numeros fractos dividere.* 32

In Algebræ Librum I.

I. Probl. *Algebraicas quantitates in unam ſummam colligere.* 35
II Probl. *Compoſitas quantitates ad ſimpliciores expreſſiones reducere.* 35
III. Probl. *Algebraicas quantitates ſubtrahere.* 36
IV. Probl. *Algebraicas quantitates multiplicare.* 37
V. Probl. *Algebraicas quantitates dividere.* 40

In Algebræ Librum II.

I. Theor. *Si quælibet fractio multiplicetur per ſuum denominatorem, productum erit numerator ejuſdem fractionis.* 48
II. Theor. *Si numerator, & denominator cujuſlibet fracti multiplicentur, aut dividantur per eandem quantitatem, fractionis valor non muta-*

mutabitur. 48

III. Probl. *Integram quantitatem in fractionem dati denominatoris reducere.* 49

IV. Probl. *Fractiones ad eundem denominatorem reducere.* 50

V. Probl. *Algebraicas fractiones addere.* 51

VI. Probl. *Fractiones ſubtrahere.* 51

VII. Probl. *Fractiones multiplicare.* 52

VIII. Probl. *Fractiones dividere.* 53

In Algebræ Librum III.

I. Probl. *Cujuſvis datæ quantitatis quadratum, cubum, quartam poteſtatem, quintam, & alias omnes poteſtates invenire.* 56

II. Probl. *Ex dato numero radicem quadratam extrahere.* 58

III. Probl. *Ex dato numero radicem cubicam extrahere.* 61

IV. Probl. *Radicem quadratam ex Algebraicis quantitatibus extrahere.* 64

V. Probl. *Radicem cubicam ex Algebraicis quantitatibus extrahere.* 65

In Geometriæ Librum I,

Qui eſt de quantitatum rationibus, & proportionibus.

I. Theor. *Datis quatuor terminis proportionalibus, productum extremorum ſemper æquale erit producto mediorum.* 71

II. Theor. *Si quatuor termini ea conditione inter ſe comparati ſint, ut productum ex primo in quartum æquale ſit producto ſecundi termini in tertium, erunt iidem termini proportionales inter ſe.* 72.

III. Probl. *Datis tribus terminis, invenire quartum terminum proportionalem.* 73

IV. Theor. *Datis quatuor terminis proportionalibus, primus ad tertium eandem rationem habebit, quam habet ſecundus ad quartum. Atque hoc argumentandi genus dicitur* alternare, *vel* permutare rationem. 77

V. Theor. *Si fuerint quatuor termini proportionales, ſecundus ad primum eandem rationem habebit, quam habet quartus ad tertium. Quod dicitur* rationem invertere. 77

VI. Theor. *Datis quatuor terminis proportionalibus, ſumma primi, & ſecundi eandem rationem habebit ad ſecundum, quam habet ſumma tertii cum quarto ad eundem quartum. Hoc argumentandi genus appellatur* compoſitio rationis. 78

VII. Theor. *Quoties fuerint quatuor magnitudines proportionales, differentia inter primam, & ſecundam ad ſecundam eandem rationem habebit, quam habet differentia inter tertiam, & quartam ad eandem quartam. Hæc argumentatio dicitur* diviſio rationis. 79

VIII. Theor. *Datis quatuor magnitudinibus proportionalibus, ita erit prima*

ad

ad differentiam inter primam, & ſecundam, ſicuti tertia ad differentiam inter tertiam, & quartam. Et hic argumentandi modus converſio rationis appellatur. 79

IX. Axioma. *Quantitates æquales eandem rationem habent ad aliam quantitatem. Viciſſim eadem quantitas eandem rationem habet ad æquales quantitates.* 80

X. Axioma. *Magnitudines, quæ habent eandem rationem ad eandem quantitatem ſunt inter ſe æquales. Similiter ſi eadem magnitudo eandem rationem habuerit ad alias quantitates, quantitates ipſæ erunt æquales inter ſe.* 80

XI. Axioma. *Rationes, quæ ſunt ſimiles, ſeu æquales eidem rationi, vel æqualibus rationibus, ſunt etiam æquales inter ſe.* 81

XII. Theor. *Si fuerint quotcunque magnitudines proportionales, ſeu quotcunque rationes æquales,* colligendo, *ita ſe habebit ſumma omnium antecedentium ad ſummam omnium conſequentium, ſicuti quælibet antecedens ad ſuam conſequentem.* 81

XIII. Theor. *Datis quatuor terminis proportionalibus, ſi antecedentes, vel conſequentes, vel primus & ſecundus terminus, vel tertius & quartus terminus multiplicentur, aut dividantur per eandem quantitatem, quatuor termini ſemper proportionales erunt.* 82

XIV. Theor. *Si omnes termini cujuſvis datæ proportionis per eandem quantitatem, vel antecedentes per unam quantitatem, & conſequentes per aliam, vel duo primi termini per unam, & duo ultimi per aliam quantitatem multiplicentur, aut dividantur, quatuor termini ſemper proportionales erunt.* 82

XV. Theor. *Datis duabus, aut pluribus proportionibus, quæ habeant eoſdem conſequentes, erit ſumma priorum antecedentium ad communem conſequentem, ſicuti ſumma ſecundorum antecedentium ad eorum communem conſequentem. Si autem habuerint eoſdem antecedentes, erit primus communis antecedens ad ſummam priorum conſequentium, ut ſecundus communis antecedens ad ſummam ſecundorum conſequentium.* 84

XVI. Theor. *Datis duabus, aut pluribus rationibus, ſi antecedentes multiplicentur inter ſe, & conſequentes etiam inter ſe, duo producta conſtituent rationem, quæ compoſita erit ex datis rationibus.* 85.

XVII. Theor. *Si fuerint quotcunque magnitudines ejuſdem generis, ratio primæ ad ultimam compoſita erit ex omnibus intermediis rationibus, ſcilicet primæ ad ſecundam, ſecundæ ad tertiam, tertiæ ad quartam &c.* 86

XVIII. Theor. *Si fuerint duo ordines quantitatum numero æqualium, ſitque prima ad ſecundam primi ordinis, ut prima ad ſecundam alterius ordinis, & ſecunda ad tertiam primi ordinis, ut ſecunda ad tertiam ſecundi ordinis, & tertia ad quartam primi, ut tertia ad quartam ſecundi; atque ita deinceps; tunc datæ quantitates dicuntur eſſe in* ratione ordinata, *& erit prima ad ulti-*

ultimam primi ordinis, ſicut prima ad ultimam ſecundi ordinis; & hoc dicitur argumentari ex æqualitate ordinata, *vel* ordinando. 86

XIX. Theor. *Si in duobus quantitatum ordinibus fuerit prima ad ſecundam primi ordinis, ut ſecunda ad tertiam alterius ordinis; & ſecunda ad tertiam primi ordinis, ut prima ad ſecundam alterius ordinis: tunc quantitates datæ dicuntur eſſe* in ratione perturbata; *atque erit prima ad ultimam primi ordinis, ut prima ad ultimam ſecundi ordinis: quod dicitur argumentari* ex æqualitate perturbata, *vel* perturbando. 87

XX. Theor. *Duæ quælibet fractiones ſint inter ſe in ratione compoſita ex directa ratione numeratorum, & ex ratione inverſa, ſeu reciproca denominatorum; erit prima fractio ad ſecundam, ut productum ex numeratore primæ in denominatorem ſecundæ, ad productum ex numeratore ſecundæ in denominatorem primæ.* 88

XXI. Theor. *Fractiones, quæ habent eundem denominatorem, ſunt inter ſe in ratione directa numeratorum. Fractiones vero, quæ habent eundem numeratorem, ſunt inter ſe in ratione reciproca denominatorum.* 89

Lemma. *Æquales radices æqualia quadrata, æquales cubos &c. conſtituunt. E converſo quadrata æqualia, cubi æquales &c. habent radices æquales.* 90

XXII. Theor. *Datis duabus proportionibus, multiplicando, vel dividendo terminos unius per reſpondentes terminos alterius proportionis, producta in primo caſu, & quotientes in ſecundo erunt proportionales.* 90

XXIII. Theor. *Datis tribus terminis continue proportionalibus, productum extremorum æquale erit quadrato medii termini. Atque ratio primi termini ad tertium duplicata erit rationis primi ad ſecundum, ſive ſecundi ad tertium.* 92

XXIV. Probl. *Datis duobus terminis tertium proportionalem invenire.* 93

XXV. Theor. *In omni progreſſione Geometrica ratio primi termini ad quartum eſt triplicata rationis primi ad ſecundum. Ratio primi ad quintum eſt quadruplicata rationis primi ad ſecundum, atque ita deinceps.* 94

XXVI. Theor. *In omni Geometrica progreſſione productum extremorum adæquat productum terminorum ab extremis æque diſtantium; & æquale eſt quadrato termini medii, quando terminorum numerus eſt impar.* 95

XXVII. Probl. *Cujuſvis Geometricæ progreſſionis omnium terminorum ſummam invenire.* 95

XXVIII. Theor. *In omni proportione Arithmetica ſumma extremorum adæquat ſummam mediorum.* 96

XXIX. Probl. *Datis tribus Arithmeticæ proportionis terminis quartum invenire.* 97

XXX. Theor. *In omni Arithmetica progreſſione ſumma extremorum adæquat ſum-*

aggregatum duorum quorumlibet terminorum ab extremis æque diſtantium, & dupla eſt termini medii. 97

In Geometriæ Librum II.

I. Probl. Super data recta linea terminata triangulum æquilaterum deſcribere. 110
II. Probl. Ex dato puncto rectam lineam ducere æqualem datæ rectæ terminatæ. 110
III. Probl. Datis duabus rectis lineis inæqualibus, ex majore partem abſcindere æqualem minori. 111
IV. Probl. Datis tribus lineis terminatis, quarum duæ, quomodocumque ſumptæ, reliquam excedant, ſuper ipſarum unam triangulum conſtituere, habens duo latera reliquis duabus datis rectis lineis æqualia. 112
V. Theor. Si duo triangula habuerint duos angulos duobus angulis æquales, alterum alteri, & latus æquale lateri interpoſito inter angulos æquales, erunt reliqua latera reliquis lateribus æqualia, reliquus angulus reliquo angulo æqualis, & triangulum triangulo æquale erit. 113
VI. Theor. Si duo triangula habuerint angulum æqualem angulo, & latera æquales angulos efficientia æqualia inter ſe utrumque utrique; etiam baſis æqualis erit baſi, triangulum æquale triangulo, & reliqui duo anguli reliquis duobus angulis æquales erunt, quibus æqualia latera ſubtenduntur. 113
VII. Theor. Si duo triangula habuerint duo latera duobus lateribus æqualia, utrumque utrique, & habuerint angulum majorem angulo a lateribus æqualibus contento, habebunt etiam baſim majorem baſi. 114.
VIII. Theor. Si duo triangula habuerint duo latera duobus lateribus æqualia, utrumque utrique, & baſim majorem baſi; habebunt pariter angulum majorem angulo a lateribus æqualibus contento. 115
IX. Theor. Si duorum triangulorum ſingula latera ſingulis lateribus æqualia fuerint, etiam ſinguli anguli ſingulis angulis æquales erunt, quibus æqualia latera ſubtenduntur, & triangulum triangulo æquale erit. 115
X. Probl. Ad datam rectam lineam indefinitam, & ad punctum in ea datum, angulum rectilineum conſtituere æqualem dato angulo rectilineo. 116
XI. Probl. Datum angulum rectilineum biſariam dividere. 117
XII. Probl. Datam rectam lineam terminatam biſariam dividere. 117
XIII. Probl. Ad datam rectam lineam, & ex puncto in ea dato perpendicularem lineam erigere. 118
XIV. Probl. Ad datam rectam lineam indefinitam, atque ex puncto extra ipſam dato, perpendicularem lineam demittere. 119
XV. Theor. Recta linea ſuper aliam rectam inſiſtens efficit duos angulos con-

ſequen-

ſequentes, vel rectos, vel duobus rectis æquales. 119

XVI. Theor. *Si ad punctum aliquod in data recta ex oppoſitis partibus concurrant duæ rectæ lineæ, quæ efficiant duos angulos conſequentes duobus rectis æquales; illæ duæ rectæ lineæ in directum poſitæ erunt, hoc eſt unicam rectam lineam component.* 120

XVII. Theor. *Duæ rectæ lineæ ſe mutuo ſecantes efficiunt angulos ad verticem oppoſitos æquales inter ſe.* 121

XVIII. Theor. *Rectæ lineæ perpendiculares ad eandem rectam ſunt parallelæ inter ſe.* 122

XIX. Theor. *Si recta linea ſupra duas rectas incidens fecerit angulos alternos æquales inter ſe; vel angulum externum æqualem angulo interno, & oppoſito ad eandem partem; vel duos angulos internos & ad eandem partem poſitos, æquales duobus angulis rectis: illæ duæ rectæ lineæ ſemper erunt parallelæ.* 123

XX. Theor. *Si recta linea ſupra duas parallelas incidens fuerit perpendicularis ad unam parallelarum, erit etiam perpendicularis ad alteram.* 125

XXI. Theor. *Recta linea ſupra duas parallelas oblique incidens efficiet angulos alternos æquales inter ſe; angulum externum æqualem interno, & oppoſito, ad eandem partem; & duos angulos internos, & ad eandem partem poſitos duobus rectis æquales.* 125

XXII. Theor. *Rectæ lineæ eidem rectæ parallelæ, inter ſe quoque erunt parallelæ.* 127

XXIII. Probl. *Per datum punctum rectam lineam ducere parallelam datæ rectæ.* 127

XXIV. Theor. *In omni triangulo rectilineo tres anguli ſimul ſumpti adæquant duos angulos rectos: Atque producto quovis latere, angulus externus æqualis erit duobus angulis interioribus, & oppoſitis ſimul ſumptis.* 127

XXV. Theor. *In quolibet triangulo iſoſcele anguli ſupra baſim conſtituti ſunt æquales inter ſe: Atque productis æqualibus lateribus, anguli infra baſim conſtituti ſunt etiam inter ſe æquales.* 131

XXVI. Theor. *Triangulum habens unum latus alio majus, habebit etiam angulum majori lateri oppoſitum, majorem angulo oppoſito lateri minori.* 133

XXVII. Theor. *Triangulum habens duos angulos inter ſe æquales, habebit pariter duo latera æqualia ipſis angulis oppoſita. Si autem triangulum habuerit angulum majorem angulo, tunc habebit latus oppoſitum majori angulo majus latere ſubtendente angulum minorem.* 134

XXVIII. Theor. *Omne parallelogrammum habet latera oppoſita æqualia, angulos oppoſitos æquales, & bifariam dividitur a diagonali, ſeu diametro.* 135

XXIX. Theor. *Figura quadrilatera habens duo latera parallela, & æqualia, habebit etiam reliqua duo latera parallela, & æqualia: ſcilicet erit parallelogrammum.* 13[illegible]

XXX. Probl. *Super data recta quadratum deſcribere, vel aliud quodcumque parallelogrammum.* 136

XXXI. Theor. *Parallelogramma ſupra eandem baſim, & inter eaſdem parallelas conſtituta inter ſe ſunt æqualia.* 137

XXXII. Theor. *Triangula ſuper eadem baſi, & in iiſdem parallelis conſtituta, æqualia ſunt inter ſe.* 138

XXXIII. Theor. *Si parallelogrammum, & triangulum ſuper eadem baſi, & in iiſdem parallelis poſita fuerint, parallelogrammum erit duplum trianguli.* 138

XXXIV. Probl. *Parallelogrammum conſtituere æquale dato triangulo, & habens angulum æqualem dato angulo.* 139

XXXV. Theor. *Triangula æqualia ſuper eadem baſi conſtituta, & ad eandem partem poſita, erunt in iiſdem parallelis, ſcilicet eandem altitudinem habebunt.* 139

In Geometriæ Librum III.

I. Theor. *Parallelogramma æque alta, ſive inter eaſdem parallelas conſtituta, erunt inter ſe in ratione baſium.* Similiter *triangula habentia eandem, vel æqualem altitudinem, erunt inter ſe in ratione baſium.* 141

II. Theor. *Si in quovis triangulo ducatur recta baſi parallela, ipſa recta proportionaliter ſecabit reliqua duo latera. Si autem duo trianguli latera proportionaliter ſecta fuerint ab aliqua recta, ipſa recta reliquo lateri, ſeu baſi erit parallela.* 143

III. Probl. *Ex data recta quamlibet quæſitam partem abſcindere.* 144

IV. Probl. *Datam rectam in eadem ratione dividere, qua alia recta ſecta fuerit.* 144

V. Probl. *Datis duabus rectis lineis tertiam proportionalem invenire.* 145

VI. Probl. *Datis tribus rectis lineis quartam proportionalem invenire.* 145

VII. Theor. *Triangula æquiangula habebunt latera æqualibus angulis oppoſita proportionalia.* 146

VIII. Theor. *Triangula, quæ habent latera proportionalia, ſunt etiam æquiangula.* 147

IX. Theor. *Triangula habentia angulum æqualem angulo, & latera eoſdem angulos conſtituentia, proportionalia, habebunt reliquos angulos æquales, quibus opponuntur latera proportionalia; atque ſimilia erunt ipſa triangula.* 148

X. Theor. *Si per quodlibet punctum diametri in parallelogrammo ducantur duæ rectæ parallelæ lateribus ejuſdem parallelogrammi, ipſæ rectæ divident totum parallelogrammum in quatuor parallelogramma, quorum duo, quæ ſunt circa diametrum, erunt ſimilia integro parallelogrammo, & inter ſe. Reliqua vero duo parallelogramma, quæ dicuntur* complementa *eorum, quæ ſunt circa diametrum, erunt æqualia inter ſe.* 149

XI. Theor. *Parallelogramma ſimilia, ſimiliterque poſita, & habentia angu-*

lum communem, poſita erunt circa eandem diametrum. 150

XII. Probl. *Super data recta terminata rectilineum deſcribere dato rectilineo ſimile, ſimiliterque poſitum.* 151

XIII. Theor. *Triangula ſimilia ſunt inter ſe in duplicata ratione, hoc eſt ut quadrata laterum homologorum.* 152

XIV. Theor. *Parallelogramma æquiangula ſunt inter ſe in ratione compoſita ex rationibus laterum æquales angulos conſtituentium.* 153

XV. Theor. *Polygona ſimilia ſunt inter ſe in duplicata ratione, ſeu ut quadrata laterum homologorum.* 154

XVI. Theor. *Si fuerint quatuor, vel plures rectæ lineæ proportionales, etiam polygona ſimilia, & ſimiliter ab eis deſcripta proportionalia erunt. Atque e converſo, ſi a rectis lineis ſimilia polygona, ſimiliterque deſcripta, proportionalia fuerint, ipſæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt.* 155

XVII. Theor. *In omni triangulo rectangulo ſi ab angulo recto ſupra latus oppoſitum demittatur linea perpendicularis, dividet totum triangulum in duo triangula ſimilia toti, & ſimilia inter ſe.* 156

XVIII. Theor. *Si ſuper tria cujuſvis trianguli rectanguli latera tres figuræ ſimiles, ſimiliterque poſitæ deſcribantur, erit figura ſupra hypothenuſam deſcripta ſemper æqualis duabus figuris ſimul ſumptis ſupra cathetos deſcriptis.* 157

XIX. Probl. *Rectam lineam invenire cujus quadratum adæquet quadrata plurium datarum linearum.* 159

XX. Theor. *Quadrati diameter eſt incommenſurabilis lateri ejuſdem quadrati.* 159

In Geometriæ Librum IV.

I. Theor. *Circuli concentrici habent peripherias æquidiſtanter, ſeu parallelas.* 162.

II. Theor. *Recta linea a centro circuli ad medietatem cujuſvis chordæ ducta eſt perpendicularis eidem chordæ. E converſo ſi a centro circuli ſupra quamlibet chordam ducatur recta perpendicularis, eandem chordam biſariam ſecabit.* 163

III. Probl. *Dati circuli centrum invenire.* 164

IV. Probl. *Dati arcus centrum invenire, ut integra deſcribatur peripheria.* 164.

V. Theor. *Si ab aliquo puncto intra circulum tres rectæ lineæ æquales ad peripheriam ductæ fuerint, punctum illud erit centrum circuli.* 165.

VI. Probl. *Per quodvis peripheriæ punctum rectam circuli tangentem ducere.* 166.

VII. Theor. *Angulus ad centrum duplus eſt anguli ad peripheriam, quando inſiſtunt ſuper eodem arcu.* 167

VIII. Theor. *Omnes anguli ad peripheriam, & in eodem circuli ſegmento contenti, ſive qui inſiſtunt ſuper eodem arcu, ſunt æquales inter ſe.* 168

IX. Theor. *Omne quadrilaterum in circulo inſcriptum, ſive cujus anguli ſint in peripheria circuli, habet angulos oppoſitos ſimul ſumptos duobus rectis æquales.* 168

X. Theor. *Angulus in ſemicirculo inſcriptus ſemper eſt rectus.* 169

XI. Probl. *A puncto extra circulum dato rectam circuli tangentem ducere.* 169

XII. Theor. *Angulus contentus a circuli tangente, & a chorda per punctum contactus ducta, æqualis eſt angulo deſcripto in oppoſita, ſeu alterna circuli portione.* 170

XIII. Theor. *In circulis æqualibus, vel in eodem circulo, anguli æquales ſive ad centra, ſive ad peripherias conſtituti, inſiſtunt ſupra arcus æquales. Viciſſim ſi arcus ſunt æquales anguli, inſiſtentes ſive ad centra, ſive ad peripherias, erunt æquales.* 171

XIV. Theor. *In circulis æqualibus, vel in eodem circulo, æquales chordæ arcus æquales ſubtendunt. Viciſſim ſi arcus fuerint æquales, etiam chordæ eoſdem arcus ſubtendentes erunt inter ſe æquales.* 172

XV. Probl. *Datum arcum biſariam dividere.* 173

XVI. Probl. *Ex dato circulo portionem abſcindere, quæ contineat angulum æqualem dato angulo rectilineo.* 173

XVII. Theor. *In quovis circulo ſi duæ rectæ a peripheria utrinque terminatæ ſe mutuo ſecent, rectangulum contentum ex partibus unius, erit æquale rectangulo contento a partibus alterius rectæ.* 173

XVIII. Theor. *Si ex quolibet puncto, & extra circulum ducantur duæ rectæ, quarum una circulum tangat, & altera circulum utcumque ſecet; ſemper erit quadratum tangentis æquale rectangulo contento a tota ſecante, & ab ejus parte extra circulum poſita.* 174

XIX. Probl. *Datam rectam terminatam ita in duas partes dividere, ut tota ad partem majorem eandem rationem habeat, quam habebit eadem pars major ad minorem. Quod dicitur,* rectam lineam media, & extrema dividere ratione. 175

XX. Probl. *Datis duabus rectis mediam proportionalem invenire* 176

XXI. Theor. *Si recta biſariam ſecetur, eique in directum addatur quælibet alia recta, quadratum lineæ dimidiæ cum adjecta, erit æquale rectangulo contento ex data cum adjecta, & ab adjecta cum quadrato dimidiæ.* 177

XXII. Theor. *Si recta linea dividatur biſariam, & non biſariam, erit rectangulum contentum a partibus inæqualibus una cum quadrato intermediæ ſemper æquale quadrato dimidiæ.* 177

XXIII. Theor. *Si quælibet recta terminata dividatur utcumque, quadratum totius æquale erit quadratis partium una cum duplo rectangulo ab ipſis partibus contento.* 178

XXIV. Theor. *Si in aliquo triangulo quadratum unius lateris fuerit æquale quadratis reliquorum laterum, angulus a reliquis lateribus contentus erit rectus.* 179

In

In Geometriæ Librum V.

I. Theor. *Si ex centro circulorum concentricorum ducantur quotcunque radii ſecantes utramque peripheriam, & ducantur etiam chordæ, polygona in iiſdem circulis inſcripta ſimilia erunt.* 181
II. Theor. *Similes figuræ regulares in circulis inſcriptæ ſunt inter ſe ut quadrata radiorum, vel cathetorum, vel diametrorum.* 182
III. Theor. *Circulus eſt ad zonam ſibi inſcriptam ſicuti quadratum radii ejuſdem circuli ad rectangulum contentum a latitudine zonæ, & a reliqua parte diametri ejuſdem circuli.* 184
IV. Probl. *In dato circulo quadratum inſcribere.* 185
V. Probl. *In dato circulo Hexagonum regulare inſcribere.* 186
VI. Probl. *Circa datum circulum polygonum circumſcribere dato polygono æquiangulum.* 187
VII. Probl. *In dato triangulo circulum inſcribere.* 188
VIII. Theor. *Area cujuslibet polygoni regularis eſt æqualis triangulo, cujus baſis adæquet perimetrum, & altitudo ſit æqualis catheto ejuſdem polygoni.* 189
IX. Theor. *Circulus eſt omnibus figuris regularibus ſibi hiſoperimetris major; ſive eſt omnium figurarum ſibi hiſoperimetrarum capaciſſima.* 192

In Geometriæ Librum VI,

Qui eſt de Solidorum Doctrina.

I. Theor. *Omne triangulum totum jacet in eodem plano.* 198
II. Theor. *Communis ſectio duorum planorum eſt linea recta.* 198
III. Theor. *Si recta linea perpendicularis fuerit ad duas rectas ſe mutuo ſecantes, ipſa recta erit etiam perpendicularis ad planum, in quo ipſæ rectæ jacent.* 199
IV. Theor. *Lineæ rectæ ad idem planum perpendiculares, erunt inter ſe parallelæ.* 199
V. Theor. *Si eidem rectæ lineæ parallelæ fuerint aliæ duæ rectæ ſed non in eodem plano cum illa exiſtentes, ipſæ quoque inter ſe parallelæ erunt.* 200
VI. Theor. *Si plana parallela ſecentur ab alio plano, planorum ſectiones erunt etiam parallelæ.* 201
VII. Theor. *Si duæ rectæ ſe invicem ſecantes in plano parallelæ fuerint rectis ſe mutuo ſecantibus in plano; duo plana erunt pariter inter ſe parallela.* 201
VIII. Theor. *Quodlibet priſma polygonum dividitur in totidem priſmata triangularia æque alta, quot ſunt latera baſis, demptis duobus.* 202
IX. Theor. *Si quodlibet priſma triangulare ſecetur a plano tranſverſo baſi parallelo, ſectio erit ſimilis, & æqualis baſi.* 203
X. Theor. *Omne priſma componi intelligitur ex totidem planis baſi æqualibus, & pa-*

& parallelis, quot ſunt elementa, ſeu puncta in altitudine ejuſdem priſmatis; atque productum ex altitudine in baſim erit ſoliditas ejuſdem priſmatis. 204

XI. Theor. *Si quælibet pyramis triangularis ſecetur a plano tranſverſo baſi parallelo, ſectio erit ſimilis baſi. Baſis vero ad quamlibet ſectionem ſibi parallelam erit ut quadratum altitudinis totius pyramidis, ad quadratum altitudinis abſciſſæ pyramidis.* 204

XII. Theor. *Pyramides æque altæ, ſive inter plana parallela conſtitutæ, ſunt inter ſe in ratione baſium.* 206

XIII. Theor. *Priſma eſt triplum pyramidis habentis eandem, vel æqualem baſim, & eandem, vel æqualem altitudinem.* 207

XIV. Theor. *Priſmata æque alta ſunt inter ſe in ratione baſium.* 208

XV. Theor. *Priſmata habentia æquales baſes ſunt inter ſe in ratione altitudinum.* 209

XVI. Theor. *Priſmata quæcumque ſunt inter ſe in ratione compoſita ex rationibus baſium, & altitudinum.* 209

XVII. Theor. *Priſmata, quæ habent baſes in reciproca ratione altitudinum, ſunt æqualia. E converſo priſmata æqualia habent baſes in reciproca ratione altitudinum.* 211

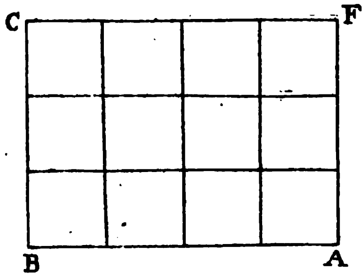
XVIII. Theor. *Sphæra duas tertias partes circumſcripti cylindri adæquat.* 211.

XIX. Theor. *Sphæræ ſunt inter ſe in ratione triplicata, ideſt ut cubi diametrorum.* 213

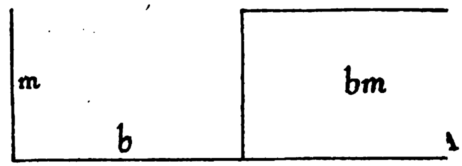
FINIS.

TAVOLA III.

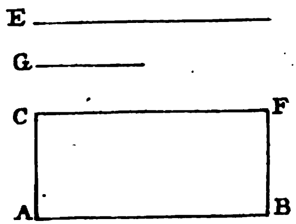
1.



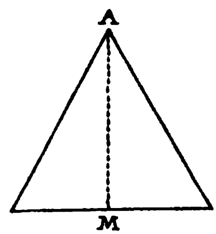
2.



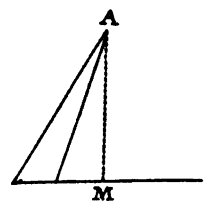
5.



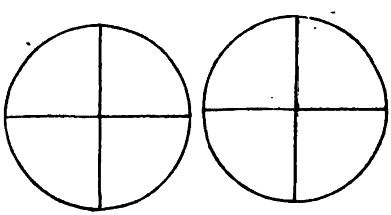
6.



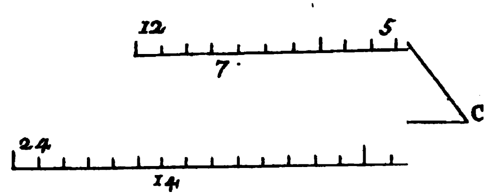
6.



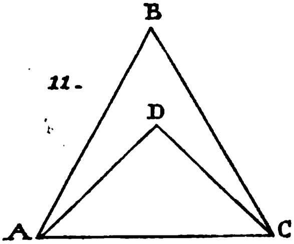
7.



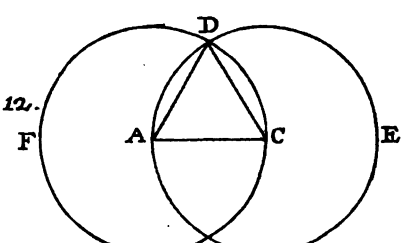
8.



11.



12.

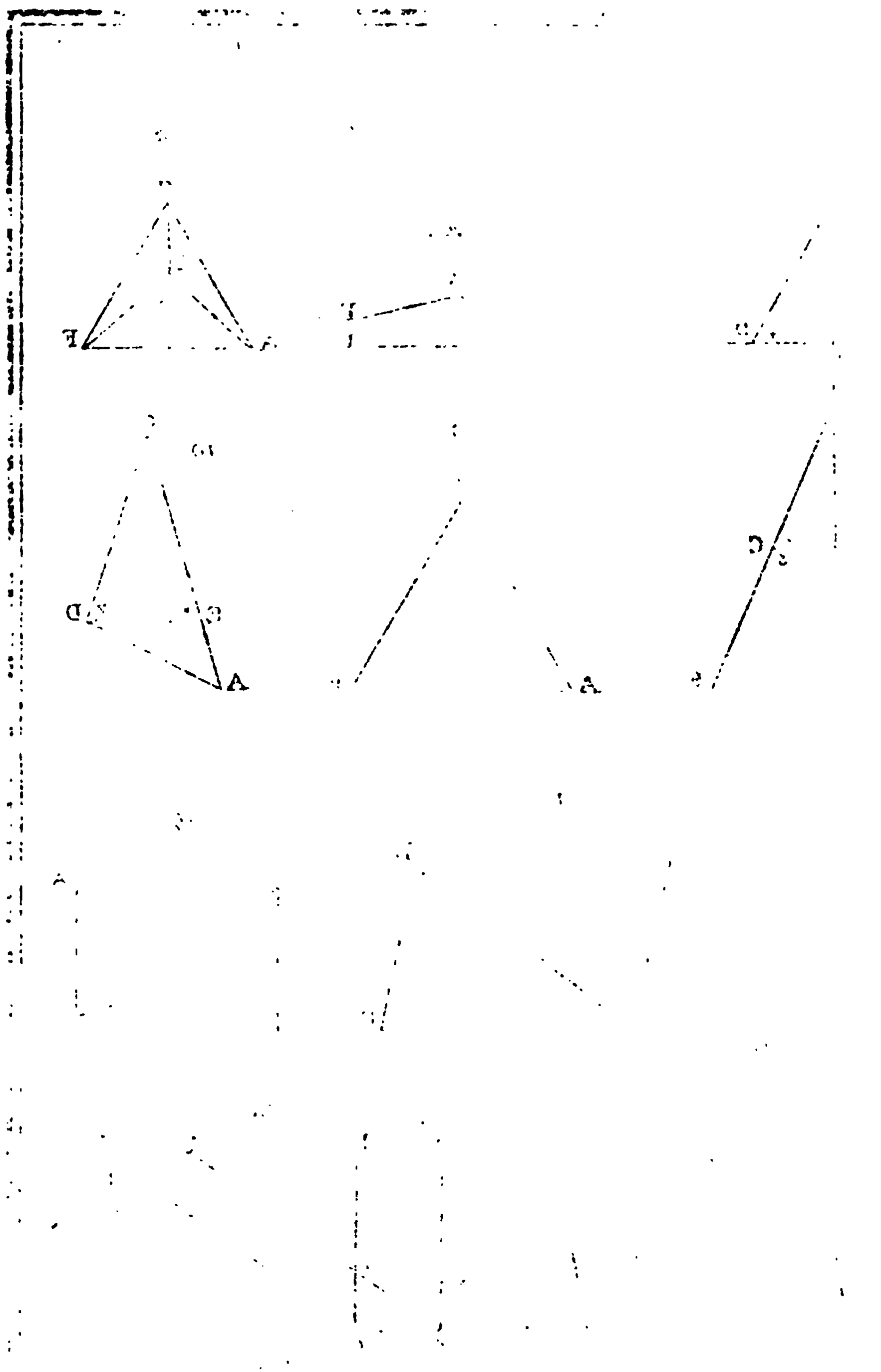


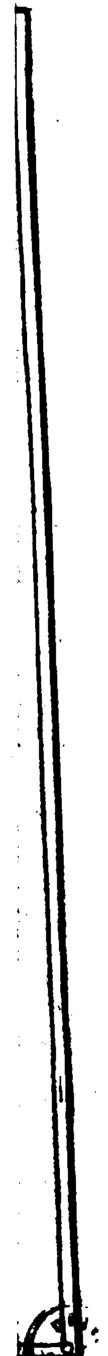
13.

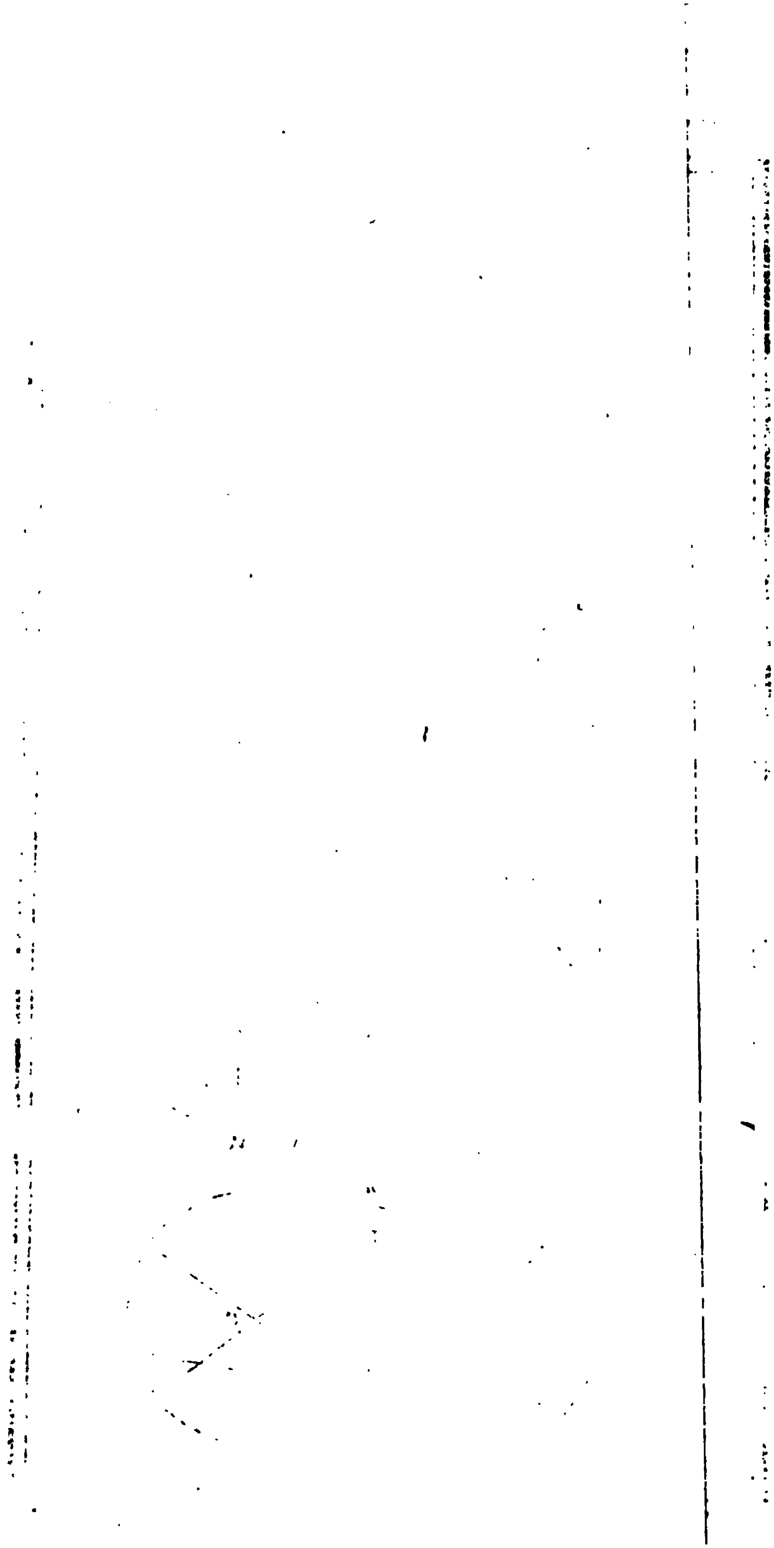


A

C

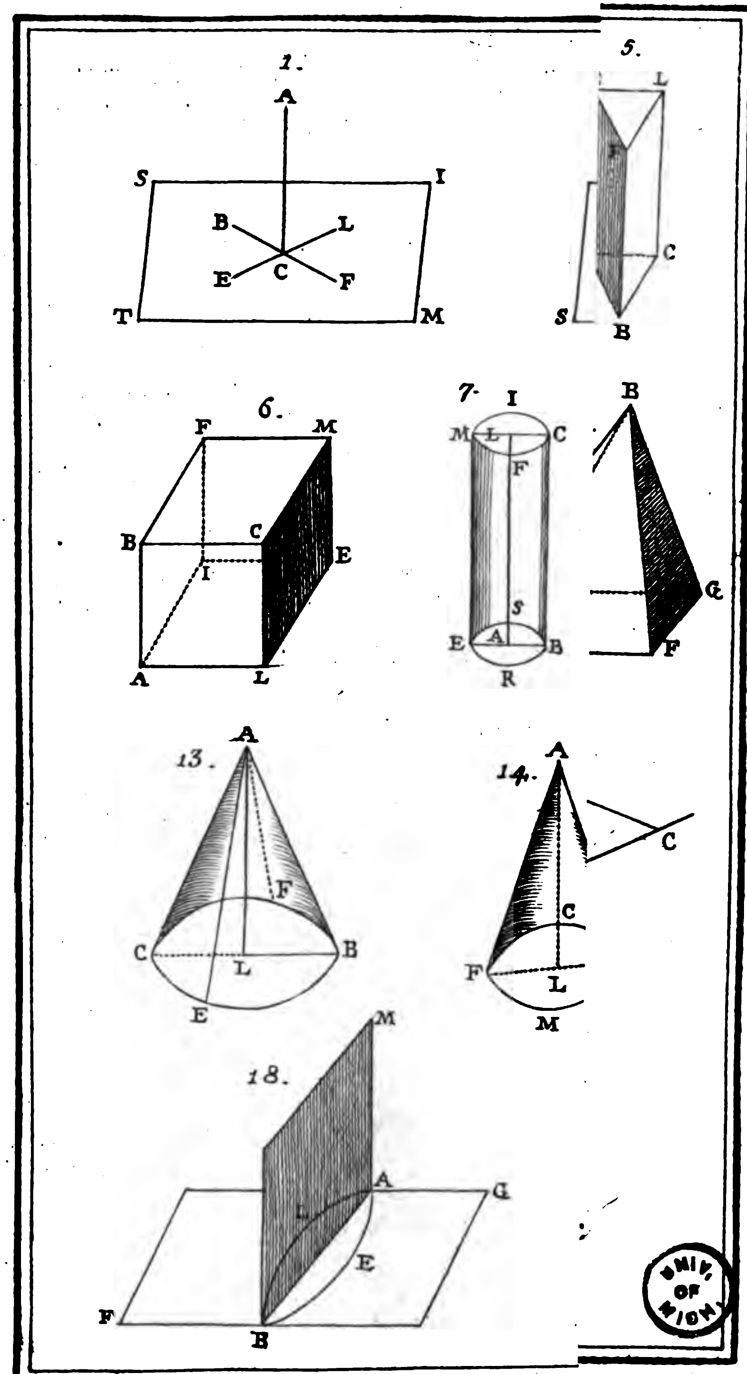







E

TAVOLA XII.



UNIV. OF MICH.